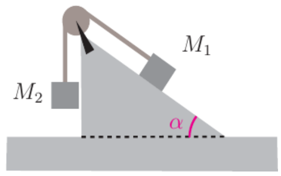
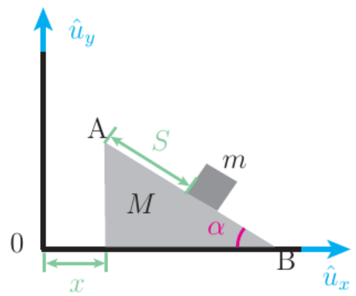
Práctico 2: Ecuaciones de Lagrange

1. Si L es el Lagrangiano de un sistema con n grados de libertad que satisface las ecuaciones de Lagrange, muestre que
$$L' = L + \frac{dF(q,t)}{dt}$$
cumple las mismas ecuaciones de Lagrange siendo $F(q,t)$ una función (derivable) arbitraria.

2. En el sitema de la figura la polea y la cuerda de la figura son ideales y los bloques deslizan sin rozamiento. Obtenga las aceleraciones de los bloques a partir de las ecuaciones de Lagrange.



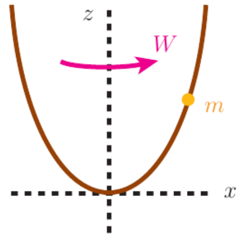
3. La figura muestra una partícula de masa m apoyada sobre una cuña de masa M y ángulo α respecto a la horizontal. Desprecie el rozamiento entre el plano inclinado y el piso y entre el plano inclinado y la partícula. La distancia entre los puntos A y B del plano inclinado es D.



   (a) Demuestre que si la partícula parte del reposo respecto al plano inclinado desde el punto A, el tiempo que tarda en llegar al punto B es
$$t = \sqrt{\frac{2D(M + m\sin^2\alpha)}{(M+m)g\sin\alpha}}$$

   (b) ¿Hay alguna coordenada cíclica? ¿Cuánto vale su momentum generalizado conjugado y qué representa? ¿La funcion energía h se conserva? ¿Es igual a la energía?

4. Un alambre en forma de parábola se hace rotar alrededor de un eje de simetría (eje z) con velocidad angular constante W. El eje z es vertical y cuando el alambre está en el plano xz la ecuación que lo describe es $z = ax^2$ (con a una constante positiva). Una cuenta de masa m desliza sin fricción por el alambre.

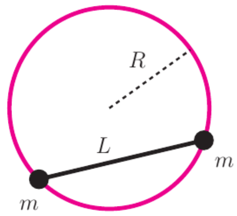


(a) Halle el vector velocidad de la cuenta en función de las coordenadas generalizadas tomando como base de vectores ortonormales la usual en coordenadas cilíndricas.

(b) Halle el Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento. ¿Que condición debe cumplirse y cuál debe ser la velocidad inicial de la cuenta respecto al alambre, para que la misma pueda tener un movimiento circular de radio R, no nulo, alrededor del eje Z?

(c) Halle una constante de movimiento. ¿Se conserva la energía? La cuenta se suelta del reposo, respecto al alambre, a una altura D sobre el plano xy. Halle su rapidez al pasar por el origen y diga qué valores están permitidos para W.

5. Dos cuentas de masa m cada una están restringidas a moverse sobre un aro fijo, vertical y de radio R. Las cuentas se mantienen unidas por medio de una barra sin masa y de longitud L ($L < 2R$).



(a) Escriba las ecuaciones de Lagrange.

(b) Calcule la frecuencia de las pequeñas oscilaciones en torno a la posición de equilibrio.

(c) Si la barra se suelta del reposo desde una posición vertical, halle la rapidez del centro de la barra cuando esta se encuentra en posición horizontal.

6. Una partícula de masa m está confinada a moverse en la superficie de una esfera de radio R en presencia de un campo gravitacional constante g. Tome el origen en el centro de la esfera y el eje z en la dirección vertical hacia arriba. Use como coordenadas generalizadas los angulos esféricos θ (colatitud) y ϕ (azimut).

(a) Obtenga las ecuaciones de movimiento para θ y ϕ.

(b) Halle los momentos generalizados P_θ y P_ϕ y demuestre por cálculo directo que corresponden a las componentes en $\hat{e}_\phi$ y $\hat{e}_z$ del momentum angular respecto al origen.

(c) Halle dos integrales de movimiento independientes. A partir de ellas escriba una expresión integral que permita obtener $t = t(\theta)$ (no resuelva la integral).

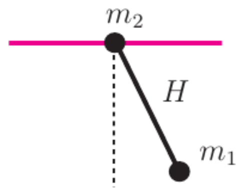
7. Encuentre el Lagrangiano de un péndulo plano (un punto pesado que se mueve en un plano vertical, colgado de un hilo tenso sin masa), donde:

(a) El hilo tiene longitud fija y el punto de suspensión se desplaza uniformemente en una circunferencia de radio a, con velocidad angular ω.

(b) El hilo tiene longitud fija y el punto de suspensión efectúa oscilaciones horizontales de la forma $a\cos(\omega t)$.

(c) El hilo tiene longitud fija y el punto de suspensión efectúa oscilaciones verticales de la forma $a\sin(\omega t)$.

8. La figura muestra un péndulo plano que consta de dos partículas, una de masa m_1 atada a su extremo libre y otra de masa m_2 en el punto de suspensión, unidas por un hilo sin masa de longitud H. El punto de suspensión se desliza libremente a lo largo de un eje horizontal sin roce.



Escriba las ecuaciones de movimiento (sin resolverlas) y encuentre dos cantidades conservadas.

9. Una cuenta de masa $m_1 = m$ se mueve sin fricción enhebrada en un alambre con las siguientes características: está contenido en un plano vertical, se encuentra en reposo en un referencial inercial S, tiene forma de parábola con vértice hacia abajo y se describe por la ecuación $z = ax^2$, con a una constante positiva. De la cuenta cuelga, por medio de una cuerda sin masa y de longitud h, una esferita de masa $m_2 = m$ que se mueve en el plano de la parábola.

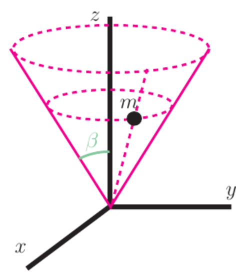
(a) Determine cuántos grados de libertad tiene el sistema y seleccione coordenadas generalizadas.

(b) Halle las velocidades de las dos partículas según el referencial S y en función de las coordenadas generalizadas expresadas en la base cartesiana.

(c) Escriba Lagrangiano del sistema.

(d) Halle los momentos generalizados y las ecuaciones de movimiento.

10. Una partícula de masa m puede moverse sin fricción sobre la superficie interior de un cono de ángulo β. El eje principal del cono, eje z, coincide con la vertical.



(a) Escriba el Lagrangiano y halle dos constantes de movimiento independientes.

(b) Obtenga las condiciones iniciales (coordenadas generalizadas y sus derivadas) para que la órbita de la partícula sea circular de radio R.