Ecuaciones Diferenciales Parciales

Práctica 1: Ecuaciones diferenciales ordinarias. Cálculo de variaciones

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Ejercicio 1. Determinar una solución (real) para cada uno de los siguientes problemas de valores iniciales.

a) $u'(t) = te^{u(t)}, \quad u(0) = 0$

b) $u'(t) = \frac{1+t}{1-u(t)}, \quad u(0) = 1$

c) $u'(t) = \frac{1+t}{1-u(t)}, \quad u(2) = 0$

d) $2tu'(t) + u(t) = 2t, \quad u(1) = 1$

e) $tu'(t) = -u(t) + 2t\sqrt{u(t)}, \quad u(1) = 4$
Sugerencia: Usar la sustitución $w(t) = \sqrt{u(t)}$.

En todos los casos, se sugiere trabajar formalmente para proponer una solución (no olvidar indicar su dominio) y luego verificar si lo es.

Ejercicio 2. Determinar la solucióon general (real) de cada uno de los siguientes sistemas lineales.

a) $\begin{cases} u_1'(t) = u_1(t) + 2u_2(t) \\ u_2'(t) = 3u_1(t) + 2u_2(t) \end{cases}$
b) $\begin{cases} u_1'(t) = u_1(t) - u_2(t) \\ u_2'(t) = u_1(t) + u_2(t) \end{cases}$
c) $\begin{cases} u_1'(t) = -2u_1(t) - u_2(t) \\ u_2'(t) = u_1(t) \end{cases}$

Ejercicio 3. Determinar una solución (real) para cada uno de los siguientes problemas con condiciones de frontera.

a) $\begin{cases} u''(t) + u'(t) = 2u(t) \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = 0 \end{cases}$
b) $\begin{cases} u''(t) + 2u'(t) = -u(t) \\ u(0) = 1, \quad u(1) = 0 \end{cases}$
c) $\begin{cases} u''(t) + 2u(t) = -2u'(t) \\ u(0) = 1, \quad u(\pi/2) = 1 \end{cases}$

Ejercicio 4. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{1+n}$ abierto y conexo. Anotamos con (t, x) a los puntos de Ω, donde $t \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función continua y Lipschitz continua con respecto a su segundo argumento. Para $(t_0, u_0) \in \Omega$, consideramos el problema de valores iniciales

$$u'(t) = f(t, u(t)), \qquad u(t_0) = u_0.$$

Por el teorema de Picard, sabemos que existe una solución u definida en un entorno de t_0. Demostrar que u se extiende a un intervalo maximal de existencia $I = (\alpha, \beta)$.

Sugerencia: Considerar $I = \bigcup_{J \in \mathcal{A}} J$ donde $\mathcal{A}$ es la colección de todos los intervalos J que contienen a t_0 y sobre los cuales existe una solución del problema dado.

Ejercicio 5.

a) Verificar que el problema de valores iniciales

$$u'(t) = 1 + u(t)^2, \qquad u(0) = 0,$$

admite una única solución y determinar su intervalo maximal de existencia.

b) Verificar que el problema de valores iniciales

$$u'(t) = |u(t)|^{1/2}, \qquad u(0) = 0,$$

admite infinitas soluciones globales (i.e., soluciones cuyo intervalo maximal de existencia es $\mathbb{R}$).

Sugerencia: Buscar soluciones de la forma $u(t) = k(t+\alpha)^\gamma$ para α dado y k, γ a determinar.

Ejercicio 6. Lema de Gronwall Sean u y v funciones continuas no negativas en $[a,b]$ tales que, para $\alpha \geq 0$, satisfacen satisfacen que:

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t u(\tau)v(\tau)\, d\tau \quad t \in [a,b]$$

Probar que:

$$u(t) \leq \alpha \exp \int_a^t v(\tau)\, d\tau$$

En particular si $\alpha = 0$, $u \equiv 0$.

Ejercicio 7. Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ globalmente Lipschitz, consideramos el flujo $\phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ asociado a un sistema autónomo

$$\begin{cases} u'(t) &= f(u(t)), \qquad t \in I, \\ u(t_0) &= u_0 \end{cases}$$

dado por $\phi_t(u_0) = u(t)$. Probar si f es diferenciable C^1, entonces el flujo también lo es, y la diferencial del flujo $D\phi_t(x_0) = M(t)$ puede calcularse resolviendo el sistema linealizado

$$\begin{cases} M'(t) &= A(t)M(t), \qquad t \in I, \\ M(t_0) &= I \end{cases} \tag{1}$$

donde $A(t) = Df(\phi_t(u_0))$.

Ejercicio 8 (Fórmula de Liouville)**.** Si $M(t)$ es una solución de (1) entonces

$$\frac{d}{dt} \det M(t) = Tr(A(t))\, \det M(t)$$

Ejercicio 9. Fórmula de variación de las constantes

a) Consideremos una ecuación de la forma

$$u'(t) = Au(t) + f(t)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz de constantes, y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es continua, con la condición inicial $u(t_0) = u_0$. Entonces la solución viene dada en la forma:

$$u(t) = S(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^t S(t-s)f(s)\, ds$$

donde $S(t) = e^{tA}$ es el semigrupo asociado a la matriz A.

b) Encontrar la solución general de la ecuación $2u''(t) + 18u(t) = 6\, \tan(3t)$

Ejercicio 10. Sistemas Hamiltonianos Sea $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ de clase C^2. En R^{2n} usamos las coordenadas $q_1, q_2, \ldots, q_n; p_1, p_2, \ldots p_n$. Consideramos el sistema

$$\begin{cases} p_i'(t) &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}(q(t), p(t)) \\ q_i'(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t), p(t)) \\ q_i(0) &= q_{i,0} \\ p_i(0) &= p_{i,0} \end{cases}$$

a) Comprobar que el Hamiltoniano $H(p(t), q(t))$ se preserva en el tiempo.

b) **Oscilador armónico:** Probar que en el caso en que $n = 2$ y

$$H(p, q) = \frac{1}{2}mp^2 + \frac{1}{2}kq^2$$

donde $m, k > 0$ son constantes, la solución puede encontrarse explícitamente.

c) Si

$$\lim_{|(p,q)| \to +\infty} H(p, q) = +\infty$$

entonces el intervalo maximal de existencia es $\mathbb{R}$.

d) **Teorema de Liouville**: Probar que el flujo asociado a este sistema preserva el volumen.

Cálculo de variaciones

Ejercicio 11. Sea $L \in C^2([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $L = L(t, u, v)$. Consideramos el problema de minimización

$$\text{Hallar } u^* \in X \text{ tal que } I(u^*) = \inf \left\{ I(u) = \int_a^b L(t, u(t), u'(t))\, dt : u \in X \right\},$$

donde $X = \{u \in C^1([a, b]) : u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta\}$ para α, β dados. En cada caso, verificar que (E) es la ecuación de Euler-Lagrange asociada al problema de minimización.

a) Si $L(t, u, v) = L(v)$ entonces (E): $\frac{d}{dt} L'(u'(t)) = 0$. Deducir que las extremales de I (i.e., las soluciones de (E)), satisfacen

$$L'(u'(t)) = \text{ constante}, \quad t \in (a, b).$$

b) Si $L(t, u, v) = L(t, v)$ entonces (E): $\frac{d}{dt} L_v(t, u'(t)) = 0$. Deducir que las extremales de I satisfacen

$$L_v(t, u'(t)) = \text{ constante}, \quad t \in (a, b).$$

c) Si $L(t, u, v) = L(u, v)$ entonces (E): $\frac{d}{dt} L_v(u(t), u'(t)) = L_u(u(t), u'(t))$. Deducir que las extremales de I satisfacen

$$L(u(t), u'(t)) - u'(t) L_v(u(t), u'(t)) = \text{ constante}, \quad t \in (a, b).$$

Ejercicio 12. Considerar el mismo problema de minimización que en el Ejercicio 11, con $L(t, u, v) = L(v)$. Notar que la función u^* dada por $u^*(t) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}(t - a) + \alpha$ es una extremal de I en X.

a) Demostrar que si L es una función convexa entonces u^* es solución del problema de minimización.
Sugerencia: Usar la desigualdad de Jensen sobre (a, b): $L\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b u'(t)\, dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b L(u'(t))\, dt$.

b) El siguiente ejemplo muestra que el resultado del ítem anterior puede no ser cierto si L no es convexa: Considerar $L(v) = e^{-v^2}$, $a = 0$, $b = 1$ y $\alpha = \beta = 0$. Demostrar que $\inf\left\{I(u) = \int_a^b L(t, u(t), u'(t)) : u \in X\right\} = 0$ y deducir que I no tiene mínimo en X.
Sugerencia: Para demostrar que el ínfimo es cero, considerar la sucesión $\{u_n\}$ donde $u_n(x) = n(x - 1/2)^2 - n/4$, y demostrar que $I(u_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Ejercicio 13. El objetivo de este ejercicio es determinar, entre todas las superficies de revolución de la forma

$$v(x, y) = (x, u(x)\cos y, u(x)\sin(y)), \qquad x \in (a, b), \quad y \in (0, 2\pi),$$

con $u(a) = \alpha$ y $u(b) = \beta$ fijos, aquella de superficie mínima.

a) Verificar que este enunciado conduce al siguiente problema de minimización:

$$\text{Hallar } u^* \in X \text{ tal que } I(u^*) = \text{ínf}\left\{ I(u) = 2\pi \int_a^b u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}\,dx : u \in X \right\},$$

donde $X = \{u \in C^1([a,b]) \,:\, u(a) = \alpha,\, u(b) = \beta,\, u > 0\}$ para $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

b) Deducir que las extremales de I satisfacen

$$u'(x)^2 = \frac{u(x)^2}{\lambda^2} - 1, \qquad x \in (a,b),$$

donde λ es una constante no nula.

c) Considerar $a = 0$, $b = 1$ y $\alpha = \beta$. Demostrar que si $u \in C^2([0,1])$ resuelve el problema de minimización entonces

$$u(x) = \lambda \cosh\left(\frac{2x-1}{2\lambda}\right) \quad \text{donde } \lambda \text{ está determinado por} \quad \lambda \cosh\left(\frac{1}{2\lambda}\right) = \alpha.$$

Ejercicio 14. Considerar el mismo problema de minimización que en el Ejercicio 11, pero ahora con $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $L(t,u,v) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n m_k v_k^2 - V(u)$ donde $m_1, m_2, \ldots m_n > 0$ son constantes y $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1.

a. Obtener la ecuación de Euler-Lagrange asociada a este problema.
b. Verificar que este esta ecuación puede reescribirse como un sistema Hamiltoniano, introduciendo coordenadas generalizadas p, q adecuadas.
c. Interpretar físicamente el ítem a) del ejercicio 10 en este ejemplo.