Ecuaciones Diferenciales Parciales

Práctica 2: Series de Fourier y separación de variables

Ejercicio 1. Sean $p \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función medible e integrable en $[-p, p]$ tal que $f(x+2p) = f(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$. Verificar los siguientes resultados:

(a) $\displaystyle\int_{2p}^{2p+x} f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\displaystyle\int_{x-p}^{x+p} f(t)\,dt = \int_{-p}^{p} f(t)\,dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(c) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. Entonces $g(x+2p) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ si y sólo si $\displaystyle\int_{-p}^{p} f(t)\,dt = 0$.

Ejercicio 2. En cada caso, determinar la serie de Fourier de senos de f y estudiar la convergencia puntual de la serie hallada.

(a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{si } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$ (b) $f(x) = x \quad (0 \leq x < \pi)$.

Ejercicio 3. Sea $f \in AC[-\ell, \ell]$ tal que $f' \in L^2(-\ell, \ell)$ y $f(-\ell) = f(\ell)$. Demostrar que la serie de Fourier de f' se obtiene derivando término a término la serie de Fourier de f y que los coeficientes de Fourier de f son sumables, es decir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty,$$

donde:

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\,dx \quad n \in \mathbb{N}_0, \qquad b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\,dx \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ejercicio 4 (Problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en un rectángulo)**.** Considerar el siguiente problema:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & & 0 < x < \ell,\ 0 < y < m, \\ u(0,y) = 0, & u(\ell,y) = 0 & 0 \leq y \leq m, \\ u(x,0) = f(x), & u(x,m) = 0 & 0 \leq x \leq \ell. \end{cases}$$

1. Hallar una solución formal mediante el método de separación de variables.
2. Sea u la solución formal hallada en el ítem 1. Demostrar los siguientes resultados:
   a) Si $f \in L^1(0, \ell)$ entonces $u \in C^2([0, \ell] \times (0, m])$ y u satisface la ecuación de Laplace en $(0, \ell) \times (0, m)$.
   b) Si $f \in L^2(0, \ell)$ entonces $u(\cdot, y) \to f$ en $L^2(0, \ell)$ si $y \to 0$. Cuando ocurre esto último se dice que u satisface la condición inicial $u(\cdot, 0) = f$ en el sentido de L^2.
   c) Si $f \in AC(0, \ell)$ con $f' \in L^2(0, \ell)$ y $f(0) = f(\ell) = 0$ entonces $u(\cdot, 0) = f$.

Usando el principio de superposición, se puede ahora hallar una solución formal del problema con condiciones de borde $u(0,y) = f_1(y)$, $u(\ell, y) = f_2(y)$, $u(x, 0) = f_3(x)$ y $u(x, m) = f_4(x)$ y determinar condiciones sobre las funciones f_i, $i = 1, \ldots, 4$, para que la solución formal resuelva el problema.

Ejercicio 5 (Problema de valores iniciales y de borde para la ecuación del calor unidimensional)**.** Considerar el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) & & 0 < x < \ell,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, & u(\ell,t) = 0 & t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x) & & 0 \leq x \leq \ell. \end{cases}$$

1. Hallar una solución formal mediante el método de separación de variables.
2. Dar condiciones sobre f para que la solución formal u hallada en el ítem 1 pertenezca a $C^\infty([0,\ell] \times (0,\infty))$ y resuelva el problema cuando se considera la condición inicial en el sentido de L^2.
3. Dar condiciones sobre f para que la solución formal u hallada en el ítem 1 pertenezca a $C^\infty([0,\ell] \times (0,\infty)) \cap C([0,\ell] \times [0,\infty))$ y resuelva el problema cuando se considera la condición inicial en sentido clásico.

Ejercicio 6 (Problema de la cuerda vibrante con dos extremos fijos)**.** Considerar el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) + h(x) & & 0 < x < \ell,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, & u(\ell,t) = 0 & t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), & u_t(x,0) = g(x) & 0 \leq x \leq \ell. \end{cases}$$

1. Suponer $h \equiv 0$ (vibración libre). Usar el método de separación de variables para hallar una solución formal y determinar condiciones sobre las funciones f y g para que dicha solución pertenezca a $C^2(D) \cap C(\bar{D})$ y resuelva el problema, donde $D = (0,\ell) \times (0,\infty)$.
2. Suponer $h \not\equiv 0$ (vibración forzada). Repetir el ítem anterior y determinar condiciones también para h.

   Sugerencia: Buscar soluciones de la forma $u(x,t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right)$.

Ejercicio 7. Hallar una solución del problema:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) + u_x(x,y) = 0 & & 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u(0,y) = 0, & u(\pi,y) = \sin(y) & 0 \leq y \leq \pi, \\ u(x,0) = 0, & u(x,\pi) = 0 & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Ejercicio 8 (Problemas de Dirichlet y de Neumann para la ecuación de Laplace en una bola de $\mathbb{R}^2$)**.** Sea $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

1. (Operador Laplaciano en coordenadas polares). Sean $u \in C^2(B)$ y $U : (0,1] \times [-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ definida por

   $$U(r,\theta) = u(x,y) \qquad \text{donde} \quad x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta).$$

   Demostrar que

   $$\Delta u(x,y) = \frac{1}{r^2} U_{\theta\theta}(r,\theta) + \frac{1}{r} U_r(r,\theta) + U_{rr}(r,\theta).$$

   El lado derecho se conoce como *operador Laplaciano en coordenadas polares.*

2. (Problema de Dirichlet) Considerar el siguiente problema:

   $$\Delta u = 0 \quad \text{en} \quad B, \qquad\qquad u = f \quad \text{sobre} \quad \partial B.$$

   a) Pasar a coordenadas polares, usar el método de separación de variables para hallar una solución formal y dar condiciones sobre f para que la solución hallada resuelva el problema.

   Sugerencia: Buscar soluciones que sean acotadas en el origen.

b) Verificar que la solución hallada en el ítem a) se escribe en coordenadas rectangulares como:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{y \in \partial B} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^2} f(y)\, dS \qquad \forall\, x \in B,\, x \neq 0.$$

3. (Problema de Neumann) Repetir el ítem 2-a para el problema:

$$\Delta u = 0 \quad \text{en} \quad B, \qquad\qquad \partial_{\mathbf{n}} u = f \quad \text{sobre} \quad \partial B,$$

donde $\int_{\partial B} f\, dS = 0$. Notar que ahora se obtiene una familia de soluciones, a diferencia de lo que sucede en el ítem 2-a. Probar, además, que este problema no tiene solución en $C^2(B) \cap C^1(\bar{B})$ si $\int_{\partial B} f dS \neq 0$.

Ejercicio 9 (Ecuaciones del calor y de ondas en una bola de $\mathbb{R}^2$)**.** Sea $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

1. (Ondas) Utilizar el método de separación de variables para hallar una solución formal de la ecuación de ondas:

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \qquad \text{en} \quad B \times (0, \infty),$$

suponiendo $u = 0$ en $\partial B \times (0, \infty)$.

Sugerencia:

a) Transformar el problema a coordenadas polares.

b) Buscar soluciones de la forma $u(r, \theta, t) = \varphi(r, \theta) T(t)$ y verificar que φ debe ser solución de la ecuación de Helmholtz $\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$. Aquí Δ indica el operador Laplaciano en coordenadas polares.

c) Buscar soluciones de la forma $\varphi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ para la ecuación de Helmholtz. Verificar que

$$\Theta(\theta) = A_k \cos(k\theta) + B_k \sin(k\theta) \qquad \text{donde} \qquad k \in \mathbb{N}_0 \qquad (A_k, B_k \in \mathbb{R}),$$

y que R debe ser solución de

$$r^2 R'' + r R' + (\lambda r^2 - k^2) R = 0, \qquad \text{donde} \qquad \lambda \in \mathbb{R},\, k \in \mathbb{N}_0.$$

d) Suponer $\lambda > 0$ y verificar que haciendo la transformación $z = \sqrt{\lambda} r$ la ecuación para R se reduce a la ecuación de Bessel de orden k:

$$z^2 \frac{d^2 R}{dz^2} + z \frac{dR}{dz} + (z^2 - k^2) R = 0.$$

e) Tener en cuenta que la función de Bessel de primer tipo de orden k:

$$J_k(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(j+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j+k},$$

resuelve la ecuación de Bessel de orden k y está acotada en $z = 0$.

2. (Calor) Utilizar el método de separación de variables para hallar una solución formal de la ecuación del calor:

$$u_t - c^2 \Delta u = 0 \qquad \text{en} \quad B \times (0, \infty),$$

suponiendo $u = 0$ en $\partial B \times (0, \infty)$.

Sugerencia: Seguir pasos similares a los del ítem anterior.

Ejercicio 10 (Problema de autovalores para el operador $-\Delta$ en un cuadrado)**.** Sea $Q := (0, 1) \times (0, 1)$ el cuadrado unitario en $\mathbb{R}^2$. Verificar que las soluciones que se obtienen mediante el método de separación de variables para el problema de autovalores:

$$-\Delta u = \lambda u \qquad \text{en} \quad Q, \qquad u = 0 \qquad \text{sobre} \quad \partial Q,$$

están dadas por:

$$u_{kj}(x, y) = \sin(\pi j x) \sin(\pi k y) \qquad \text{donde} \quad \lambda_{kj} := \pi^2 (j^2 + k^2), \qquad j, k \in \mathbb{N}.$$