Facultad
de
Ciencias

# Introducción al cálculo de variaciones

## (Introduction to the calculus of variations)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

## GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Marcos Valle Miñón

Director: Delfina Gómez Gandarillas

Junio-2020

# Resumen/Abstract


## Resumen:

El cálculo de variaciones trata de encontrar las funciones que minimizan o maximizan el valor de un cierto funcional definido sobre un determinado espacio. Problemas como hallar el camino de menor longitud que une dos puntos de una determinada superficie o encontrar la curva cerrada de una longitud dada que encierra el área máxima pueden ser resueltos usando el cálculo de variaciones.

En este trabajo se estudian ciertos problemas de esta disciplina, abordando algunas condiciones necesarias y suficientes para que exista solución, y aplicándolas a diversos ejemplos, ya sean clásicos, originales o más enfocados a la vida real.



**Palabras clave:** mínimo, funcional, variación, ecuación de Euler.



## Abstract:

The calculus of variations tries to find functions which minimize or maximize the value of a certain functional defined on a fixed space. Finding the path of minimum length that joins two points on a surface or discovering which is the closed curve of a given length that contains the biggest possible area inside it are two problems that can be solved using this mathematical discipline.

In this project, we study several variational problems and we provide necessary and sufficient conditions for existence of solutions for each one. In addition, we apply them to a wide range of examples such as classical, original and real life problems.



**Keywords:** minimum, functional, variation, Euler equation.

# Notaciones

A continuación, introducimos algunas notaciones que usaremos con frecuencia a lo largo del trabajo:

- En general, la función $f$ dependerá de 3 variables y será evaluada en $(x, y(x), y'(x))$, donde $x$ es la variable independiente, $y(x)$ es una función de $x$ e $y'(x)$ es su derivada.
- Denotaremos por $C^1([a,b])$ al espacio de las funciones escalares definidas en $[a,b]$ de clase $C^1$ y por $C^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ al formado por las funciones vectoriales definidas en $[a,b]$ de clase $C^1$.
- En la mayoría de los casos, denotaremos las derivadas parciales como

$$f_y(x, y(x), y'(x)) := \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x), y'(x)) \qquad f_{y'}(x, y(x), y'(x)) := \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)).$$

- Denotaremos $f^0(x) := f(x, y_0(x), y_0'(x))$ cuando evaluemos $f$ sobre la función $y_0$.
- El vector gradiente de una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ será

$$\nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(f_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right).$$

- Escribiremos la matriz hessiana de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ como

$$Hf = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

# Índice general

# Introducción

El cálculo de variaciones es una disciplina matemática que consiste en buscar las funciones que minimizan o maximizan el valor de un cierto funcional. Esto incluye problemas como encontrar el camino de menor longitud que une dos puntos de una determinada superficie o hallar la superficie de revolución que posee área mínima. A lo largo de la historia, matemáticos de la talla de Euler, Lagrange, Legendre o Hilbert, por mencionar sólo a algunos, se han interesado y han hecho aportaciones a esta disciplina, que puede considerarse como el punto de partida del análisis funcional (ver [10] para más detalles). Sin embargo, los usos del cálculo de variaciones van más allá de las matemáticas, siendo utilizado también en ámbitos como la física (ver [3], por ejemplo), especialmente en la mecánica, la economía (ver, por ejemplo, [5]) o la ingeniería (como se detalla en [8]).

Aunque los griegos y alguna otra antigua civilización ya conocían la solución a algunos problemas del cálculo de variaciones, se considera que esta disciplina nace en 1696, cuando Johann Bernoulli plantea el problema de la braquistócrona a sus contemporáneos. Este problema genera un gran interés, ya que matemáticos como Leibniz, Newton, L'Hôpital o los propios hermanos Bernoulli aportan soluciones. No obstante, el cálculo de variaciones no se constituye como una disciplina matemática propia hasta los trabajos de Euler en la primera mitad del siglo XVIII, cuando encuentra la condición necesaria de primer orden dada por las ecuaciones de Euler para el funcional

$$J(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx. \tag{1}$$

Su trabajo fue perfeccionado posteriormente por Lagrange, que introdujo el concepto de la variación para la demostración de la condición y, además, fue capaz de generalizarla al caso del funcional dependiente de una función de varias variables. Sin embargo, la prueba de la Condición de Euler no estuvo completa hasta el descubrimiento del Lema fundamental del cálculo de variaciones, ya en 1879. Por otro lado, Legendre desarrolla en 1786 la condición necesaria de segundo orden, que permite diferenciar entre máximos y mínimos y que hace uso de la segunda variación. En 1837, Jacobi obtiene una tercera condición necesaria introduciendo los denominados puntos conjugados. Posteriormente, Weierstrass encuentra una nueva condición necesaria que sólo se aplica a mínimos locales fuertes (que son los considerados usando la distancia del espacio de las funciones continuas en un intervalo). Además, también surge la condición suficiente de convexidad. El objetivo de este trabajo es estudiar estos conceptos y condiciones, aplicándolas a diversos ejemplos, ya sean clásicos, originales o más enfocados a la vida real. Para más información sobre la evolución histórica del cálculo de variaciones citemos, por ejemplo, [3], [14] y [9].

No obstante, a diferencia de la optimización de funciones, no existe un resultado que pruebe la existencia de solución para un problema cualquiera de cálculo de variaciones. Este hecho, que algunos matemáticos como Dirichlet o Riemann habían supuesto de antemano, fue refutado por Weierstrass en 1870 cuando mostró varios problemas que no tenían solución. Esto aumentó aún más la importancia de los resultados que aportan condiciones suficientes.

Un ejemplo de problema sin solución (obtenido de [3]) es el consistente en encontrar la curva de longitud mínima que une dos puntos del plano $A$ y $B$ y que es perpendicular en $A$ y en $B$ al segmento que une ambos puntos. Este problema está acotado inferiormente por la longitud del segmento pero no posee un mínimo, puesto que podemos encontrar una curva de longitud tan próxima como queramos a la del segmento, pero que será siempre estrictamente mayor (ver Figura 1).

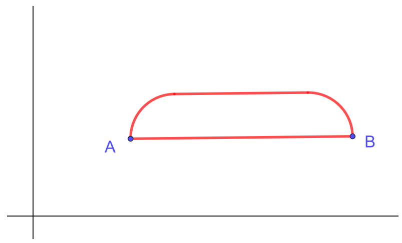


Figura 1: Problema variacional sin solución.

Sin embargo, a lo largo de la historia del cálculo de variaciones sí que se han conseguido resolver multitud de problemas, de los que destacamos cinco, aunque para alguno de ellos sólo se haya podido encontrar la solución para ciertos casos (ver [5], [6], [8], [13], [14] y [16] para más detalles).

## Problema de la braquistócrona

Sean $A = (0, 0)$ y $B = (b, y_b)$ con $b > 0$, $y_b > 0$ dos puntos del plano vertical, como se explica en [13]. El problema consiste en encontrar la curva con derivada continua que une ambos puntos y que hace que una masa se deslice por dicha curva por la acción de la gravedad en el menor tiempo posible (ver Figura 2, donde el eje positivo de $y$ se ha considerado hacia abajo).

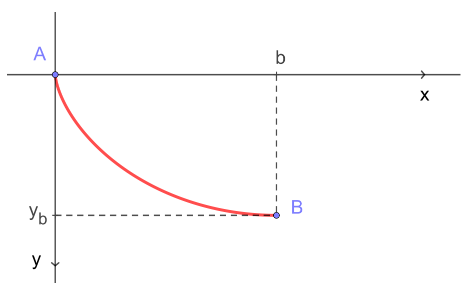


Figura 2: Cicloide que pasa por los puntos $A$ y $B$.

Formulando el problema en términos matemáticos, se trata de hallar la función de clase $C^1([0, b])$ con las condiciones $y(0) = 0$ e $y(b) = y_b$ que minimiza el tiempo de deslizamiento. Si $s$ representa la longitud de arco de la curva $y$ medida desde $A$, tenemos que $\frac{ds}{dt} = v$, donde $v$ representa la velocidad de la masa. Como la masa se desliza sin fricción por la curva y con velocidad inicial nula, aplicando el principio de conservación de la energía $mv^2/2 = mgy$, con $y$ representando la distancia al eje $x$ y $g$ el valor de la gravedad, tenemos que $v = \sqrt{2gy}$. Por lo tanto, como $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$, llegamos a

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}dx}{\sqrt{2gy}}.$$

En consecuencia, el tiempo de deslizamiento viene dado por el funcional

$$T = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}}dx,$$

y el problema consiste en buscar la función $y$ que minimiza $T$ con las condiciones $y(0) = 0$ e $y(b) = y_b$. Se trata de un ejemplo del problema básico del cálculo de variaciones, como los que estudiaremos en el capítulo 2. La solución de este problema es la cicloide dada en forma paramétrica por

$$\begin{cases} x = C_0(t - \sin(t)), \\ y = C_0(1 - \cos(t)), \end{cases}$$

donde la constante $C_0 \in \mathbb{R}$ se puede determinar a partir de los valores de $b$ e $y_b$ (ver anexo para su resolución).

## Problema de la superficie mínima de revolución

Dados dos puntos $A = (a, y_a)$ y $B = (b, y_b)$ en el plano, se trata de encontrar la curva $y$ que une ambos puntos y que, al rotarla alrededor del eje x, la superficie generada posea área mínima. El área de una superficie de revolución viene dada por el funcional

$$I = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

por lo que este problema es otro ejemplo del problema básico que estudiaremos en el capítulo 2, ya que consiste en minimizar $I$ con las condiciones de frontera $y(a) = y_a$ e $y(b) = y_b$. El mínimo de este funcional viene dado por la familia de catenarias (ver Figura 3)

$$y = C_1 \cosh\left(\frac{x - C_2}{C_1}\right),$$

donde las constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ se pueden tratar de calcular a partir de los valores de $a, b, y_a, y_b$, aunque no siempre será posible (ver [14] y [16] para más detalles). La superficie de revolución generada se denomina *catenoide* (ver anexo para la resolución detallada del problema).

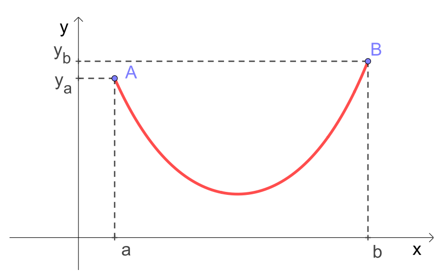


Figura 3: Curva catenaria que pasa por los puntos $A$ y $B$.

## Problema de la línea más corta que une dos puntos

Dados dos puntos $A = (a, y_a)$ y $B = (b, y_b)$ en el plano, hay que hallar la curva de menor longitud que les une. La longitud de una curva $y(x)$ viene dada por el funcional

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Por lo tanto, el problema consiste en minimizar $L$ con las condiciones $y(a) = y_a$ e $y(b) = y_b$, por lo que se trata del problema básico, cuya solución es obviamente el segmento que une ambos puntos (ver anexo para su resolución).

### Problema de las líneas geodésicas

Dados dos puntos $(a_0, b_0, c_0)$ y $(a_1, b_1, c_1)$ de una superficie $\varphi(t, y_1, y_2, y_3) = 0$, encontrar la curva $(y_1(t), y_2(t), y_3(t))$ de menor longitud contenida en la superficie que une ambos puntos. Matemáticamente, se trata de un problema similar al anterior pero incluyendo una nueva restricción, aunque en este caso consideraremos la curva escrita en forma paramétrica, por lo que hay que minimizar el funcional

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(y_1')^2 + (y_2')^2 + (y_3')^2} dt,$$

con las restricciones $\varphi(t, y_1, y_2, y_3) = 0$ y las condiciones de frontera $(y_1(t_0), y_2(t_0), y_3(t_0)) = (a_0, b_0, c_0)$ e $(y_1(t_1), y_2(t_1), y_3(t_1)) = (a_1, b_1, c_1)$. Dependiendo de la superficie este problema puede ser sencillo de resolver, como en el caso de un plano o de una esfera, o muy complicado. Estudiaremos problemas con restricciones de esta forma en el capítulo 4 y, además resolveremos el problema de las geodésicas para el caso de una esfera.

### Problema isoperimétrico

Dados dos puntos $(a_0, b_0)$ y $(a_1, b_1)$ del plano, el problema consiste en encontrar la curva cerrada plana de una longitud fija $L > 0$ que pasa por ambos puntos y que encierra un área máxima. Vamos a considerar la curva escrita en forma paramétrica $(y_1(t), y_2(t))$, luego debemos maximizar el funcional

$$A = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (y_1 y_2' - y_2 y_1')\, dt$$

con la restricción $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(y_1')^2 + (y_2')^2} dt = L$ y las condiciones de frontera $(y_1(t_0), y_2(t_0)) = (a_0, b_0)$ e $(y_1(t_1), y_2(t_1)) = (a_1, b_1)$. A este tipo de restricción dada por una integral se la denomina *isoperimétrica*. Este problema, cuya solución, que viene dada por la circunferencia de radio $L/2\pi$ que pasa por ambos puntos, ya se conocía en la Antigua Grecia, puede ser resuelto usando el cálculo de variaciones, como veremos en el último capítulo.

En este trabajo haremos una introducción al cálculo de variaciones, estudiando los casos más característicos de esta disciplina y resolviendo ejemplos variados. En el primer capítulo, nos centraremos en el problema básico, consistente en minimizar el funcional (1) sobre el espacio de funciones de clase $C^1$ con las condiciones de frontera fijas, y consideraremos algunas condiciones necesarias (Euler y Legendre) y suficientes para que exista mínimo. En el capítulo 2, estudiaremos los nuevos problemas que surgen cuando la función $f$ a integrar es más general. Concretamente, contemplaremos los casos en los que $f$ depende de varias funciones incógnita, $f$ depende de derivadas de un orden mayor que 1 y cuando la función incógnita depende de dos variables independientes.

A continuación, en el capítulo 3, ampliaremos el conjunto de las funciones admisibles, ya sea eliminando una de las condiciones de frontera sobre uno de los extremos de la función u obligando a que éste se encuentre sobre la imagen de una cierta función. Posteriormente, veremos qué ocurre cuando las funciones admisibles pasan a ser sólo de clase $C^1$ a trozos. Ello nos permitirá obtener dos nuevas condiciones para el problema básico (Jacobi y Weierstrass).

Finalmente, en el último capítulo estudiaremos problemas donde las funciones admisibles están ligadas entre ellas mediante unas determinadas restricciones, y para ello utilizaremos el método de los multiplicadores de Lagrange.

# Capítulo 1

# El problema básico

Dado que este trabajo trata sobre la búsqueda de condiciones que se han de verificar para poder minimizar un cierto funcional, vamos a definir qué entendemos por funcional. Consideramos que un funcional es una aplicación de un subconjunto de funciones reales, ya sean escalares o vectoriales, en $\mathbb{R}$, es decir, una aplicación que asigna a cada función un número real. Ese subconjunto de funciones está formado por las llamadas funciones admisibles, que son aquellas sobre las que vamos a evaluar el funcional y que cumplen las condiciones requeridas en cada problema. En este trabajo, los funcionales vienen dados por integrales.

En primer lugar, estudiaremos el caso más característico del cálculo de variaciones, que es el denominado problema básico. Consiste en minimizar el funcional

$$J(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx,$$

donde $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ están fijados y $f$ es una función de 3 variables de clase $C^2$ que está definida en un abierto $G$ de $\mathbb{R}^3$. Para este problema sólo consideramos como funciones admisibles aquellas funciones $y \in C^1([a,b])$ que cumplan que $(x, y(x), y'(x)) \in G,$ para todo $x \in [a,b]$ (en el caso de que el dominio de $f$ no sea directamente $\mathbb{R}^3$), y que verifiquen $y(a) = y_a$ e $y(b) = y_b$, donde $y_a, y_b \in \mathbb{R}$ son fijos, como se puede ver en las Figuras 1.1 y 1.2. En resumen, se trata de minimizar un funcional dependiente de una sola función y de su derivada, dependientes a su vez de una sola variable independiente, y con extremos de la función fijados. Dados $a, b, y_a, y_b \in \mathbb{R}$, formulamos el problema $(P)$:

$$(P) : \begin{cases} \text{Encontrar } y \text{ función que minimiza } \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx \\ \text{sujeto a } y \in C^1([a,b]) \text{ tal que } y(a) = y_a,\ y(b) = y_b. \end{cases}$$

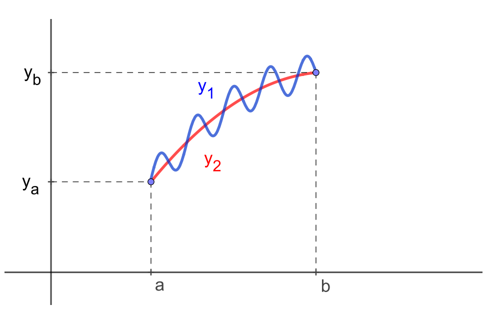


Figura 1.1: Funciones admisibles próximas según la distancia $d_0$.

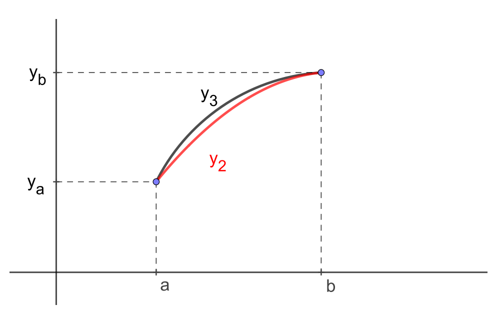


Figura 1.2: Funciones admisibles próximas según la distancia $d_1$.

Antes de entrar en más detalles, vamos a definir algunos conceptos y a mostrar dos resultados que necesitaremos para las demostraciones.

## 1.1. Conceptos y resultados previos

Al igual que en la optimización de funciones, para buscar los mínimos absolutos de un funcional primero tendremos que buscar los mínimos relativos. Es por ello que definimos dos distancias entre funciones. Dadas $y_1, y_2$ funciones continuas en $[a, b]$, usaremos

$$d_0(y_1, y_2) = \max_{x\in[a,b]} |y_1(x) - y_2(x)|$$

y, si las funciones $y_1$ e $y_2$ son de clase $C^1$ en $[a, b]$, también emplearemos

$$d_1(y_1, y_2) = \max_{x\in[a,b]} |y_1(x) - y_2(x)| + \max_{x\in[a,b]} |y_1'(x) - y_2'(x)|.$$

Notemos que $d_0(y_1, y_2) \leq d_1(y_1, y_2)$ para cualquier par de funciones $y_1, y_2$ y que estos máximos se alcanzan por tratarse de funciones continuas en un compacto. Del mismo modo puede definirse la distancia $d_k$ para $k \in \mathbb{N}$ para funciones de clase $C^k([a, b])$, aunque no la necesitemos para este trabajo. Teniendo en cuenta lo anterior, damos la definición de mínimo absoluto y relativo de un funcional:

**Definición 1.1.1.** *Sea $y_0$ una función admisible.*

- *$y_0$ es una solución del problema o un mínimo global o absoluto del funcional $J$ si para toda otra función admisible $y$ se tiene $J(y_0) \leq J(y)$. Diremos que $y_0$ es un mínimo global (o absoluto) propio si $J(y_0) < J(y)$ para toda función admisible $y \neq y_0$.*
- *Si $d$ es una distancia definida en el conjunto de funciones admisibles, diremos que $y_0$ es un mínimo local o relativo si existe $\varepsilon > 0$ tal que $J(y_0) \leq J(y)$ para toda función admisible $y$ con $d(y_0, y) < \varepsilon$. Es claro que esta definición depende de la distancia considerada. De esta manera, diremos que $y_0$ es un mínimo (o solución) relativo fuerte si existe $\varepsilon > 0$ tal que $J(y_0) \leq J(y)$ para toda función admisible $y$ con $d_0(y_0, y) < \varepsilon$. Por otro lado, $y_0$ es un mínimo (o solución) relativo débil si existe $\varepsilon > 0$ tal que $J(y_0) \leq J(y)$ para toda función admisible $y$ con $d_1(y_0, y) < \varepsilon$.*

Notemos que las nociones de mínimo relativo fuerte y débil no son equivalentes, ya que la distancia $d_1$ es más restrictiva que la $d_0$, como se aprecia en las Figuras 1.1 y 1.2. Por tanto, si dos funciones son próximas según la distancia $d_1$ también lo serán según $d_0$, pero no al contrario.

Mostramos a continuación dos resultados que vamos a utilizar con frecuencia en las demostraciones. El primero se refiere a la diferenciación bajo el signo integral (ver, por ejemplo, [15]):

**Lema 1.1.2** (Fórmula de Leibniz)**.** *Sea $I$ un intervalo y sean $\alpha, \beta : I \mapsto [a, b]$ dos funciones de clase $C^1$ y $f : [a, b] \times I \mapsto \mathbb{R}$ una función continua cuya derivada $\frac{\partial f}{\partial u}$ también es continua. Entonces la función $\psi(u) = \int_{\alpha(u)}^{\beta(u)} f(x, u)dx$ es de clase $C^1$ y*

$$\psi'(u) = f(\beta(u), u)\, \beta'(u) - f(\alpha(u), u)\, \alpha'(u) + \int_{\alpha(u)}^{\beta(u)} \frac{\partial f}{\partial u}(x, u)dx \quad \forall u \in I.$$

El otro lema que vamos a enunciar es un resultado que a veces tendremos que modificar ligeramente para adecuarlo al caso con el que estemos trabajando en ese momento (ver, por ejemplo, [6]):

**Lema 1.1.3** (Lema fundamental del cálculo de variaciones)**.** *Sea $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si para cada función continua $Y : [a, b] \to \mathbb{R}$ se verifica que*

$$\int_a^b \psi(x)Y(x)dx = 0,$$

*entonces $\psi(x) = 0$ en dicho intervalo.*

**Dem:** Supongamos que existe $x_0 \in [a,b]$ con $\psi(x_0) \neq 0$. Por ser $\psi$ continua en $[a,b]$, existirá $s \in (a,b)$ donde $\psi$ no cambia de signo y un entorno $V = (c,d)$ de $s$ contenido en $[a,b]$ tal que $\psi(x)$ conserva su signo para todo $x \in V$.

Dado un cierto $n \in \mathbb{N}$, consideramos la función $Y : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$Y(x) = \begin{cases} (x-c)^{2n}(d-x)^{2n} & \text{si } x \in V, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Es claro que la función $Y$ es continua en todo el intervalo, luego verifica la hipótesis del teorema. Sin embargo,

$$\int_a^b \psi(x)Y(x)dx = \int_V \psi(x)Y(x)dx \neq 0,$$

y llegamos a un absurdo. Luego $\psi(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$, como queríamos demostrar. ■

Notemos que el lema anterior y su demostración siguen siendo válidos si a la función $Y$ se le exige que sea de clase $C^1$ y se anule en los extremos del intervalo $[a,b]$.

A continuación, examinamos algunas condiciones necesarias y suficientes para que este problema tenga solución. Para ello nos basaremos principalmente en [4] y [5].

## 1.2. Condiciones necesarias

Partiendo de un mínimo $y_0$ del problema, podemos deducir qué condiciones cumple por el hecho de ser solución de $(P)$. Para ello, usamos la idea de transformar el problema de minimizar el funcional $J$ en un problema de optimización de una función escalar, donde aplicaremos las ya conocidas condiciones de optimalidad. Obtenemos así una serie de resultados que ahora vamos a mostrar.

### 1.2.1. Condición de Euler

Comenzamos con la condición necesaria de primer orden. De manera general, obtendremos una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de segundo orden cuyas soluciones que sean $C^2$ en el intervalo $[a,b]$ se denominan *extremales*.

**Teorema 1.2.1** (Condición necesaria de Euler)**.** *Sea $f$ una función de 3 variables de clase $C^2$. Sea $y_0 \in C^2([a,b])$ un mínimo relativo (débil o fuerte) del problema $(P)$, entonces $y_0$ verifica la ecuación de Euler:*

$$f_y\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right) - \frac{d}{dx} f_{y'}\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right) = 0 \quad \forall x \in (a,b). \tag{1.1}$$

**Dem:** Consideramos el subconjunto de las funciones admisibles para este problema dado por todas las funciones definidas en $[a,b]$ de la forma $y_\alpha(x) = y_0(x) + \alpha Y(x)$, con $|\alpha| < \alpha_0$, siendo $\alpha_0$ un número estrictamente positivo lo suficientemente pequeño, e $Y(x)$ una función $C^1$ fijada con $Y(a) = Y(b) = 0$. Es claro que todas las funciones $y_\alpha$ son admisibles para el problema $(P)$. A la cantidad $\alpha Y$ se la denomina *variación*. Tenemos, por lo tanto, un subconjunto de funciones del conjunto admisible de $(P)$ que dependen del parámetro y, de esta forma, podemos considerar el problema de minimizar el funcional $J$ dentro de este subconjunto y relacionar dicho problema con uno de optimización de una función de una sola variable. Así, $J(y_\alpha)$ depende sólo del valor de $\alpha$ y podemos definir

$$\Phi(\alpha) = J(y_\alpha) = \int_a^b f\left(x, y_0(x) + \alpha Y(x), y_0'(x) + \alpha Y'(x)\right) dx. \tag{1.2}$$

Como $y_0$ es mínimo relativo del problema $(P)$ y $d_0(y_0, y_\alpha) \leq c_0\alpha$ y $d_1(y_0, y_\alpha) \leq c_1\alpha$ para ciertas constantes $c_0, c_1$ independientes de $\alpha$, tenemos que existe $\alpha_0$ tal que $\Phi(\alpha) = J(y_\alpha) \geq J(y_0) = \Phi(0)$ para todo $|\alpha| < \alpha_0$. Luego la función $\Phi$ posee un mínimo relativo en el punto $\alpha = 0$, por lo que su derivada $\Phi'(0)$ se anula. Por otro lado, podemos derivar la expresión de $\Phi$ aplicando la fórmula de Leibniz (Lema 1.1.2) para la diferenciación bajo el signo integral:

$$\begin{aligned}\Phi'(\alpha) = \int_a^b & \left[f_y\left(x, y_0(x)+\alpha Y(x), y_0'(x)+\alpha Y'(x)\right) Y(x)\right. \\ & \left. + \, f_{y'}\left(x, y_0(x)+\alpha Y(x), y_0'(x)+\alpha Y'(x)\right) Y'(x)\right] dx.\end{aligned} \tag{1.3}$$

Evaluando en $\alpha = 0$,

$$\Phi'(0) = \int_a^b \left[f_y\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right) Y(x) + f_{y'}\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right) Y'(x)\right] dx. \tag{1.4}$$

Por comodidad llamaremos $f_y^0(x) = f_y\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right)$ y $f_{y'}^0(x) = f_{y'}\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right)$. Integramos por partes el segundo término de la integral de la expresión (1.4) y, aplicando que $Y(a) = Y(b) = 0$, se obtiene

$$\int_a^b f_{y'}^0(x) Y'(x) dx = \left[f_{y'}^0(x) Y(x)\right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \frac{d}{dx}(f_{y'}^0(x)) Y(x) dx = -\int_a^b \frac{d}{dx}(f_{y'}^0(x)) Y(x) dx.$$

Volviendo a (1.4), llegamos a

$$\Phi'(0) = \int_a^b \left[f_y^0(x) - \frac{d}{dx}(f_{y'}^0(x))\right] Y(x) dx = 0. \tag{1.5}$$

Dado que la ecuación (1.5) se cumple para toda función $Y(x)$ que sea $C^1$ y se anule en $a$ y en $b$, podemos aplicar el Lema 1.1.3 y llegamos a

$$f_y^0(x) - \frac{d}{dx} f_{y'}^0(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b).$$

En consecuencia, obtenemos (1.1), como pretendíamos. ■

A la ecuación de Euler también se la denomina *ecuación de Euler-Lagrange*, ya que la técnica de la variación usada en la demostración anterior fue ideada por Lagrange. Por otra parte, podemos aplicar esta condición a un ejemplo concreto:

**Ejemplo 1.2.2.** *¿En qué funciones puede alcanzar un mínimo $J(y) = \int_0^2 \left[3(y'(x))^2 + 4y(x)\right] dx$ con las condiciones de frontera $y(0) = 0$ e $y(2) = 1$?*

En primer lugar, planteamos la ecuación de Euler, que queda de la forma $4 - 6y'' = 0$. Se trata de un ecuación lineal de segundo orden cuya solución general es $y(x) = x^2/3 + C_1 x + C_2$, con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Ahora aplicamos las condiciones de frontera para hallar las constantes y obtenemos $C_1 = -1/6$, $C_2 = 0$. Por lo tanto, el funcional $J(y)$ sólo podrá tener un mínimo en la función $y(x) = x^2/3 - x/6$.

### 1.2.2. Condición de Legendre

Anteriormente hemos deducido la Condición de Euler a partir de la condición necesaria de primer orden de un problema de optimización para funciones escalares. Podemos usar ahora la condición necesaria de segundo orden y llegaremos a una nueva condición necesaria para nuestro problema de cálculo de variaciones $(P)$, pero antes vamos a proporcionar un lema que usaremos después para obtener dicha condición.

**Lema 1.2.3.** *Sean $g$ y $h$ dos funciones fijas que son continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$. Consideremos el funcional*

$$K(Y) = \int_a^b \left[g(x)(Y'(x))^2 + h(x)(Y(x))^2\right] dx,$$

*definido para cualquier función $Y$ de clase $C^1([a, b])$ que cumpla $Y(a) = Y(b) = 0$. Si $K(Y) \leq 0$ para toda función $Y$ que verifique las condiciones anteriores, entonces $g(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b]$.*

**Dem:** Probémoslo por reducción al absurdo. Supongamos que existe $x \in [a,b]$ con $g(x) > 0$. Vamos a encontrar una función $Y$ que haga que $K(Y)$ sea estrictamente positivo.

En primer lugar, usando la continuidad de la función $g$ existe un punto $s$ (de hecho, son infinitos) en el intervalo $(a,b)$ con $g(s) > 0$. Sea $d > 0$ con $g(s) = 2d > 0$. De nuevo por ser $g$ continua, existe $c > 0$ con $a < s-c < s < s+c < b$ con $g(x) > d$, para todo $x \in [s-c, s+c]$. Consideramos la función

$$Y(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\pi(x-s)}{c}\right) & \text{si } s-c < x < s+c, \\ 0 & \text{en el resto del intervalo } [a,b]. \end{cases}$$

Es claro que $Y(a) = Y(b) = 0$ y además $Y$ es derivable en todo el intervalo. Podemos escribir su derivada:

$$Y'(x) = \begin{cases} 2\dfrac{\pi}{c}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi(x-s)}{c}\right)\cos\left(\dfrac{\pi(x-s)}{c}\right) = \dfrac{\pi}{c}\operatorname{sen}\left(2\dfrac{\pi(x-s)}{c}\right) & \text{si } s-c < x < s+c, \\ 0 & \text{en el resto del intervalo } [a,b]. \end{cases}$$

Así, tenemos que la derivada es continua en el intervalo $[a,b]$. Si denotamos $r = \pi(x-s)/c$, tenemos

$$K(Y) = \int_a^b \left[g(x)(Y'(x))^2 + h(x)(Y(x))^2\right] dx = \int_{s-c}^{s+c} g(x)\left(\frac{\pi}{c}\right)^2 \operatorname{sen}^2(2r)dx + \int_{s-c}^{s+c} h(x)\operatorname{sen}^4(r)dx.$$

Podemos acotar inferiormente cada uno de los sumandos del segundo miembro de la igualdad:

Como $g(x) > d$ para todo $x \in [s-c, s+c]$, tenemos que

$$\int_{s-c}^{s+c} g(x)\left(\frac{\pi}{c}\right)^2 \operatorname{sen}^2(2r)dx \geq \int_{s-c}^{s+c} d\left(\frac{\pi}{c}\right)^2 \operatorname{sen}^2(2r)dx = d\frac{\pi}{2c}\int_{-2\pi}^{2\pi} \operatorname{sen}^2(u)du = d\frac{\pi^2}{c},$$

donde se ha hecho el cambio de variable $u = 2\pi(x-s)/c$.

Por otra parte, por ser $h$ una función continua en el intervalo cerrado y acotado $[a,b]$, podemos acotarla en ese intervalo, luego existe $k > 0$:

$$-k \leq h(x) \leq k \quad \forall x \in [a,b].$$

De esta forma, también acotamos $h(x)\operatorname{sen}^4(r)$:

$$-k \leq h(x)\operatorname{sen}^4(r) \leq k \quad \forall x \in [a,b],$$

luego

$$\int_{s-c}^{s+c} h(x)\operatorname{sen}^4(r)dx \geq -k\int_{s-c}^{s+c} dx = -2ck.$$

Juntando las dos acotaciones obtenidas anteriormente, finalmente tenemos

$$\int_a^b \left[g(x)(Y'(x))^2 + h(x)(Y(x))^2\right] dx \geq \frac{d\pi^2}{c} - 2ck.$$

No obstante,

$$\frac{d\pi^2}{c} - 2ck > 0 \Leftrightarrow c^2 < \frac{d\pi^2}{2k},$$

con lo cual podemos elegir $c$ de tal manera que el funcional $K(Y)$ sea estrictamente positivo, lo que contradice la hipótesis del lema, como pretendíamos. ■

Proponemos ahora una condición necesaria para nuestro problema $(P)$, que en general no será muy complicada de verificar.

**Teorema 1.2.4** (Condición necesaria de Legendre)**.** *Sea $y_0$ un mínimo relativo (fuerte o débil) del problema $(P)$ que es de clase $C^2([a,b])$ y sea $f$ una función de tres variables de clase $C^3$, entonces se verifica*

$$f_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b].$$

**Dem:** La prueba sigue los pasos dados en [5], aunque allí se demuestra para el caso del máximo. Si para la demostración de la Condición de Euler (Teorema 1.2.1) hemos usado la condición necesaria de optimalidad de primer orden aplicada a la función de una sola variable $\Phi(\alpha)$ definida en (1.2), ahora vamos a utilizar la condición necesaria de optimalidad de segundo orden aplicada a la misma función. Así, empleamos la fórmula de Leibniz (Lema 1.1.2) para derivar en (1.3), sabiendo que $f$ es de clase $C^3$:

$$\Phi''(\alpha) = \int_a^b \left[Y(x)\left(f^\alpha_{yy}(x)Y(x) + f^\alpha_{yy'}(x)Y'(x)\right) + Y'(x)\left(f^\alpha_{y'y}(x)Y(x) + f^\alpha_{y'y'}(x)Y'(x)\right)\right] dx,$$

donde $f^\alpha_{yy}(x) = f^\alpha_{yy}\left(x, y_0(x) + \alpha Y(x), y_0'(x) + \alpha Y'(x)\right)$, y lo mismo ocurre con $f^\alpha_{yy'}(x)$, $f^\alpha_{y'y}(x)$ y $f^\alpha_{y'y'}(x)$. Además, por ser $f$ de clase $C^3$ tenemos la igualdad de las derivadas cruzadas $f^\alpha_{yy'}(x) = f^\alpha_{y'y}(x)$.

Por otro lado, como $y_0$ era un mínimo relativo del problema $(P)$, ya vimos en la prueba del Teorema 1.2.1 que $\Phi(\alpha)$ tenía un mínimo en $\alpha = 0$ para $\alpha_0$ suficientemente pequeño. Por consiguiente, aplicando lo que sabemos en el caso de funciones de una sola variable, tendrá que ser $0 \leq \Phi''(0)$, cuyo valor es:

$$\Phi''(0) = \int_a^b \left[(Y(x))^2 f^0_{yy}(x) + 2Y(x)Y'(x)f^0_{yy'}(x) + (Y'(x))^2 f^0_{y'y'}(x)\right] dx, \tag{1.6}$$

con $f^0_{yy}(x) = f_{yy}\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right)$ (idem para $f^0_{yy'}(x)$ y $f^0_{y'y'}(x)$).

Resolvemos por partes la segunda integral:

$$2\int_a^b Y(x)Y'(x)f^0_{yy'}(x)dx = 2\left(\left[\frac{1}{2}(Y(x))^2 f^0_{yy'}(x)\right]_{x=a}^{x=b} - \frac{1}{2}\int_a^b (Y(x))^2 \frac{d}{dx}\left(f^0_{yy'}(x)\right) dx\right).$$

Puesto que hemos supuesto que $Y(a) = Y(b) = 0$, llegamos a

$$2\int_a^b Y(x)Y'(x)f^0_{yy'}(x)dx = -\int_a^b (Y(x))^2 \frac{d}{dx}\left(f^0_{yy'}(x)\right) dx.$$

Volviendo a (1.6),

$$\Phi''(0) = \int_a^b \left[f^0_{y'y'}(x)(Y'(x))^2 + \left(f^0_{yy}(x) - \frac{d}{dx}\left(f^0_{yy'}(x)\right)\right)(Y(x))^2\right] dx \geq 0. \tag{1.7}$$

Ya sólo resta aplicar el Lema 1.2.3 a las funciones $g(x) = -f^0_{y'y'}(Y')^2$ y $h(x) = \frac{d}{dx}f^0_{yy'} - f^0_{yy}$, que son continuas en $[a,b]$, pues $y_0$ y $f$ son de clase $C^2$ y $C^3$ respectivamente. Además, $Y$ es $C^1$ en este intervalo y cumple $Y(a) = Y(b) = 0$. En consecuencia, se satisfacen las hipótesis del lema y obtenemos que $-f_{y'y'}\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right) \leq 0$ para todo $x \in [a,b]$, como queríamos probar. ■

Apliquemos este teorema a un ejemplo concreto:

**Ejemplo 1.2.5.** *Sigamos con el Ejemplo 1.2.2 que consideramos en el apartado anterior. Se trataba de ver si podía alcanzar un mínimo el funcional $J(y) = \int_0^2 \left[3(y'(x))^2 + 4y(x)\right] dx$ con las condiciones de frontera $y(0) = 0$ e $y(2) = 1$. Ya sabíamos que sólo se podría alcanzar en la función $y(x) = x^2/3 - x/6$. Comprobemos la Condición de Legendre. Tenemos que*

$$f_{y'y'}(x, y, y') = 6 \geq 0 \quad \forall x \in [0,2].$$

*Luego $y$ cumple la Condición necesaria de Legendre para ser un mínimo relativo del funcional $J(y)$.*

## 1.3. Condición suficiente

Una vez que conocemos unas cuantas condiciones necesarias que nos permiten delimitar las funciones admisibles candidatas a ser mínimos (absolutos o relativos) del problema $(P)$, nos interesa encontrar una condición suficiente que nos permita asegurar que alguna de las funciones anteriores es efectivamente un mínimo del funcional. Para ello, como ya ocurre en la optimización de funciones reales, nos apoyaremos en la convexidad. Para comenzar, damos las definiciones pertinentes para este caso y algunas propiedades de las funciones convexas (ver, por ejemplo, [11]).

**Definición 1.3.1.** *Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Se dice que $M$ es un conjunto convexo si*

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in M \quad \forall x, y \in M \text{ y } \forall \lambda \in [0,1].$$

**Definición 1.3.2.** *Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : M \to \mathbb{R}$. Diremos que $f$ es una función convexa si*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \quad \forall x, y \in M \text{ y } \forall \lambda \in [0,1].$$

**Proposición 1.3.3.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase $C^1$ y $M \subseteq \Omega$ un conjunto convexo. Entonces $f$ es convexa sobre $M$ si, y sólo si,*

$$f(x) \geq f(y) + \nabla f(y)(x-y)^T \quad \forall x, y \in M.$$

Por último, damos otro criterio para saber cuándo una función es convexa:

**Proposición 1.3.4.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase $C^2$ y $M \subseteq \Omega$ un conjunto convexo. Entonces $f$ es convexa sobre $M$ si, y sólo si, la matriz hessiana $Hf(x)$ es semidefinida positiva.*
*En particular, si $n = 2$, $f$ es convexa si, y sólo si, para todo $(x_1, x_2) \in M$*

$$f_{x_1x_1}(x_1,x_2) f_{x_2x_2}(x_1,x_2) - f^2_{x_1x_2}(x_1,x_2) \geq 0,$$

$$f_{x_1x_1}(x_1,x_2) \geq 0.$$

Pasamos ya a enunciar la condición suficiente para determinar si una cierta función es un mínimo del problema $(P)$.

**Teorema 1.3.5** (Condición suficiente)**.** *Sea $f$ una función de tres variables de clase $C^2$ que cumple que para cada $x \in [a,b]$ el conjunto $M_x = \{(y,y') : (x,y,y')$ pertenece al dominio de definición de $f\}$ es convexo. Supongamos que $f$ restringida a $M_x$ es convexa para cada $x$. Si $y_0$ es una función admisible de clase $C^2$ que verifica la ecuación de Euler, entonces $y_0$ es un mínimo global del problema $(P)$.*

**Dem:** Fijamos $x \in [a,b]$. Como $f$ es convexa sobre $M_x$, podemos aplicar la Proposición 1.3.3 y tenemos que, para cada par de puntos $(y_0, y_0')$ e $(y, y')$ de $M_x$,

$$f(x,y,y') \geq f(x,y_0,y_0') + f_y(x,y_0,y_0')(y-y_0) + f_{y'}(x,y_0,y_0')(y'-y_0'). \tag{1.8}$$

Sean ahora $y$ e $y_0$ dos funciones admisibles, donde además $y_0$ es de clase $C^2$ y verifica la ecuación de Euler. Consideramos $J(y) - J(y_0)$ y queremos ver que esta diferencia es mayor o igual que cero:

$$J(y) - J(y_0) = \int_a^b [f(x,y(x),y'(x)) - f(x,y_0(x),y_0'(x))]dx.$$

Ahora aplicamos (1.8), llegando a

$$J(y) - J(y_0) \geq \int_a^b [f_y^0(x)(y(x)-y_0(x)) + f_{y'}^0(x)(y'(x)-y_0'(x))]dx,$$

donde $f_y^0(x) = f_y(x, y_0(x), y_0'(x))$ y $f_{y'}^0(x) = f_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))$ como con anterioridad. Integramos por partes el segundo término:

$$\int_a^b f_{y'}^0(x)(y'(x) - y_0'(x))dx = [f_{y'}^0(x)(y(x) - y_0(x))]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(f_{y'}^0(x)\right)(y(x) - y_0(x))dx.$$

Por ser $y$ e $y_0$ funciones admisibles, coinciden sus valores para $x = a$ y también para $x = b$. De esta manera, y teniendo en cuenta que $y_0$ es solución de la ecuación de Euler (1.1) por hipótesis, finalmente obtenemos

$$J(y) - J(y_0) \geq \int_a^b \left[f_y^0(x) - \frac{d}{dx} f_{y'}^0(x)\right](y(x) - y_0(x))dx = 0,$$

como pretendíamos, luego $y_0$ es un mínimo global del problema $(P)$. ■

**Nota 1.3.6.** En vez de funciones convexas, podríamos considerar sólo las que son estrictamente convexas, es decir, las que cumplen la Definición 1.3.2 con la desigualdad estricta. En ese caso, la desigualdad de la Proposición 1.3.3 sería estricta. La segunda proposición proporcionaría una condición suficiente (pero no necesaria) si se exigiese que la matriz hessiana $Hf(x)$ fuera definida positiva, lo que implicaría que las desigualdades del resto de la proposición fueran estrictas.

Con todo lo anterior, y procediendo de igual manera que en la prueba del Teorema 1.3.5, llegaríamos a que $y_0$ sería un mínimo global estricto del problema $(P)$.

Vamos a ilustrar la utilidad de la condición suficiente con un ejemplo:

**Ejemplo 1.3.7.** *Vamos a aplicar la condición suficiente al Ejemplo 1.2.2. Se trataba de minimizar el funcional* $J(y) = \int_0^2 \left[3(y'(x))^2 + 4y(x)\right] dx$ *con las condiciones* $y(0) = 0$ *e* $y(2) = 1$. *Ya habíamos visto que la única función que cumplía las condiciones de frontera y la ecuación de Euler era*

$$y(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{6}.$$

*Por lo tanto, basta ver que el integrando* $f = 3(y')^2 + 4y$ *es convexo y para ello aplicamos la Proposición 1.3.4 en el caso* $n = 2$:

$$f_{yy} = 0, \quad f_{yy}f_{y'y'} - f_{yy'}^2 = 0.$$

*Por consiguiente, tenemos que* $f$ *es convexa y la función* $y(x) = x^2/3 - x/6$ *es un mínimo global de este problema.*

## 1.4. Maximizar funcionales

Hasta el momento, nos hemos dedicado solamente a buscar el mínimo, ya sea relativo o absoluto, de un funcional. Sin embargo, el hecho de que $\max(J(y)) = -\min(-J(y))$, hace que el problema de minimizar englobe también el caso de maximizar. No obstante, los resultados que hemos obtenido habrá que modificarlos ligeramente en ocasiones para el caso del máximo. En esta sección enunciaremos las definiciones y resultados adaptados al siguiente problema, donde $a, b, y_a, y_b \in \mathbb{R}$, $a < b$, están fijados:

$$(P_{max}) : \begin{cases} \text{Encontrar } y \text{ función que maximiza } \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx \\ \text{sujeto a } y \in C^1([a,b]) \text{ tal que } y(a) = y_a,\ y(b) = y_b. \end{cases}$$

En primer lugar, hay que definir el concepto de máximo:

**Definición 1.4.1.** *Sea* $y_0$ *una función admisible para el problema* $(P_{max})$, *es decir,* $y_0 \in C^1([a,b])$ *verificando* $y_0(a) = y_a$ *e* $y_0(b) = y_b$.

- *$y_0$ será una solución del problema ($P_{max}$) o un máximo global o absoluto del funcional $J$ si para toda otra función admisible $y$ se tiene $J(y_0) \geq J(y)$. Diremos que $y_0$ es un máximo global (o absoluto) propio si $J(y_0) > J(y)$ para $y \neq y_0$.*
- *Se dirá que $y_0$ es un máximo (o solución) relativo fuerte si existe $\varepsilon > 0$ tal que $J(y_0) \geq J(y)$ para toda función admisible $y$ con $d_0(y_0, y) < \varepsilon$. Por otro lado, $y_0$ será un máximo (o solución) relativo débil si existe $\varepsilon > 0$ tal que $J(y_0) \geq J(y)$ para toda función admisible $y$ con $d_1(y_0, y) < \varepsilon$.*

En cuanto a las condiciones necesarias, la Condición de Euler (Teorema 1.2.1) es válida también para cuando se trata de maximizar un funcional. Si $y_0$ es un máximo de ($P_{max}$), entonces $y_0$ es un mínimo del problema de minimizar $-J(y) = \int_a^b -f(x, y(x), y'(x))dx$ sujeto al resto de condiciones anteriores. Por consiguiente, $y_0$ verifica la ecuación de Euler para $-f$:

$$-f_y\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right) - \frac{d}{dx}\left[-f_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))\right] = 0 \quad \forall x \in (a, b),$$

por lo que también la cumplirá para $f$. Notemos que en la demostración de la Condición de Euler se trabajó con la condición necesaria para que una función de una variable tenga un mínimo en un punto, consistente en que se anule la derivada en ese punto, que también es necesario para que haya un máximo.

No obstante, en la prueba de la Condición de Legendre (Teorema 1.2.4) se partió de la condición necesaria de segundo orden para que una función de una variable posea un mínimo en un punto, que es que la derivada segunda evaluada en dicho punto sea mayor o igual que cero. En el caso del máximo, esa condición era que fuera negativa. Debido a ese cambio de signo en la derivada segunda, se deduce que la Condición de Legendre variará su signo, obteniendo el resultado:

**Proposición 1.4.2** (Condición de Legendre para máximos)**.** *Sea $y_0$ un máximo relativo (fuerte o débil) del problema ($P_{max}$) que es de clase $C^2([a, b])$ y sea $f$ una función de tres variables de clase $C^3$, entonces se verifica*

$$f_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

Con respecto a la condición suficiente, ahora nos apoyaremos en la concavidad y en una de sus propiedades.

**Definición 1.4.3.** *Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : M \to \mathbb{R}$. Diremos que $f$ es una función cóncava si*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad \forall x, y \in M \ y \ \forall \lambda \in [0, 1].$$

**Proposición 1.4.4.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase $C^1$ y $M \subseteq \Omega$ un conjunto convexo. Entonces $f$ es cóncava sobre $M$ si, y sólo si,*

$$f(x) \leq f(y) + \nabla f(y)(x - y)^T \quad \forall x, y \in M.$$

De forma análoga al Teorema 1.3.5, se prueba la condición suficiente para ($P_{max}$) cambiando convexidad por concavidad. De esta manera, se tiene:

**Proposición 1.4.5** (Condición suficiente para máximos)**.** *Sea $f$ una función de tres variables de clase $C^2$ que cumple que para cada $x \in [a, b]$ el conjunto $M_x = \{(y, y') : (x, y, y')$ pertenece al dominio de definición de $f\}$ es convexo. Supongamos que $f$ restringida a $M_x$ es cóncava para cada $x$. Si $y_0$ es una función admisible de clase $C^2$ que verifica la ecuación de Euler, entonces $y_0$ es un máximo global del problema ($P_{max}$).*

# Capítulo 2

# Extensión a funciones $f$ más generales

Tras haber analizado el problema básico, vamos a abordar algunos casos más generales. En primer lugar, estudiaremos cuando $f$ depende de varias funciones y de sus correspondientes derivadas primeras. A continuación, trataremos el caso en el que la función $f$ depende de una única función y de sus derivadas de hasta un cierto orden. También consideraremos el caso en el que cada función $y$ depende de dos variables independientes. En cada caso, hallaremos una condición necesaria, extendiendo lo que ya sabemos de la Condición de Euler para el problema básico, y otra suficiente utilizando la convexidad, como ya hicimos en el capítulo anterior.

## 2.1. La función $f$ depende de varias funciones

En este apartado, dado $n \in \mathbb{N}$, vamos a considerar el funcional

$$J(\overline{y}) = J(y_1, \ldots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), \ldots, y_n'(x))dx,$$

con $a < b$ números reales fijos. La función $f$ depende de $2n+1$ variables y es de clase $C^2$ definida en $G$, siendo $G$ un abierto de $\mathbb{R}^{2n+1}$. Para este problema sólo se considerarán como funciones admisibles aquellas funciones $\overline{y} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ que sean $C^1$, cumplan que $(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x)) \in G$ para todo $x \in [a, b]$ y verifiquen las condiciones $\overline{y}(a) = \overline{y_a}$ e $\overline{y}(b) = \overline{y_b}$, donde $\overline{y_a}, \overline{y_b} \in \mathbb{R}^n$ son fijos. De esta manera, formulamos el problema $(P_{y_n})$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ e $\overline{y_a}, \overline{y_b} \in \mathbb{R}^n$ son dados:

$$(P_{y_n}) : \begin{cases} \text{Encontrar } \overline{y} \text{ función que minimiza } \int_a^b f(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x))dx \\ \text{sujeto a } \overline{y} \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^n) \text{ tal que } \overline{y}(a) = \overline{y_a},\ \overline{y}(b) = \overline{y_b}. \end{cases}$$

Como las distancias $d_0$ y $d_1$ que hemos estado usando hasta ahora sólo eran válidas para funciones $y : [a, b] \to \mathbb{R}$, vamos a extenderlas para que nos permitan trabajar con funciones vectoriales. De esta manera, si $\overline{y}, \overline{z}$ son funciones continuas en $[a, b]$, definimos (como en [13])

$$d_0(\overline{y}, \overline{z}) = \sum_{i=1}^{n} \max_{x \in [a,b]} |y_i(x) - z_i(x)|,$$

y si $\overline{y}, \overline{z}$ son de clase $C^1$,

$$d_1(\overline{y}, \overline{z}) = \sum_{i=1}^{n} \left( \max_{x \in [a,b]} |y_i(x) - z_i(x)| + \max_{x \in [a,b]} |y_i'(x) - z_i'(x)| \right).$$

Por otro lado, el concepto de mínimo de la Definición 1.1.1 se extiende de manera natural a este problema aplicando las nuevas distancias.

Vamos a enunciar una condición necesaria para este problema, obtenida de una manera similar a la Condición de Euler ya vista. En este caso, en vez de una ecuación, obtendremos un sistema de EDOs de segundo orden. A las soluciones que sean de clase $C^2$ se las denomina *extremales*.

**Teorema 2.1.1** (Condición necesaria)**.** *Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $f$ una función de $2n+1$ variables de clase $C^2$. Sea $\overline{y_0} \in C^2([a,b];\mathbb{R}^n)$ un mínimo relativo (débil o fuerte) del problema $(P_{y_n})$, entonces $\overline{y_0}$ verifica, para cada $i = 1,\dots,n$, la siguiente ecuación:*

$$f_{y_i}\left(x,\overline{y_0}(x),\overline{y_0}'(x)\right) - \frac{d}{dx} f_{y_i'}(x,\overline{y_0}(x),\overline{y_0}'(x)) = 0 \quad \forall x \in (a,b). \tag{2.1}$$

**Dem:** La prueba sigue la idea dada en [6]. Consiste en reducir este problema dependiente de varias funciones a uno que dependa de una única función para, a partir de ahí, aplicar la Condición de Euler (Teorema 1.2.1) ya vista.

Vamos a demostrarlo para el caso $i = 1$ por comodidad, pero el resto son idénticos. Consideramos el subconjunto de las funciones admisibles para el problema $(P_{y_n})$ dado por todas las funciones definidas en $[a,b]$ de la forma $\overline{y_\alpha}(x) = \overline{y_0}(x) + \alpha\overline{Y}(x)$, con $|\alpha| < \alpha_0$, siendo $\alpha_0$ un número estrictamente positivo lo suficientemente pequeño, e $\overline{Y}(x)$ una función vectorial de clase $C^1([a,b];\mathbb{R}^n)$ fijada de la forma $\overline{Y}(x) = (Y_1(x),0,\dots,0)$, con $Y_1(a) = Y_1(b) = 0$. Vemos que efectivamente las funciones $\overline{y_\alpha}$ son admisibles para $(P_{y_n})$.

Podemos considerar el problema de minimizar $J$ dentro de este subconjunto de funciones. Entonces, si $\overline{y_0} = (y_{01}, y_{02},\dots,y_{0n})$ e $\overline{y_\alpha} = (y_{\alpha 1}, y_{\alpha 2},\dots,y_{\alpha n})$,

$$\begin{aligned} J\left(\overline{y_\alpha}\right) &= \int_a^b f\left(x, y_{01}(x) + \alpha Y_1(x),\dots,y_{0n}(x) + \alpha Y_n(x), y_{01}'(x) + \alpha Y_1'(x),\dots,y_{0n}'(x) + \alpha Y_n'(x)\right) dx \\ &= \int_a^b f\left(x, y_{01}(x) + \alpha Y_1(x), y_{02}(x),\dots,y_{0n}(x), y_{01}'(x) + \alpha Y_1'(x), y_{02}'(x),\dots,y_{0n}'(x)\right) dx \\ &\equiv J(y_{\alpha 1}), \end{aligned}$$

donde la última equivalencia se sigue de que todas las componentes $y_{\alpha i}$ son funciones fijas si $2 \le i \le n$ para nuestro nuevo problema al no depender de $\alpha$, luego realmente el funcional $J$ podemos considerarlo como sólo dependiente de $y_{\alpha 1}$ y de su derivada.

Por lo tanto, tenemos un funcional dependiente de una sola función como en el problema $(P)$ ya estudiado y podemos aplicarle la Condición de Euler, obteniendo

$$f_{y_1}\left(x,\overline{y_0}(x),\overline{y_0}'(x)\right) - \frac{d}{dx} f_{y_1'}(x,\overline{y_0}(x),\overline{y_0}'(x)) = 0 \quad \forall x \in (a,b).$$

Razonando de igual manera para cada $i = 2,\dots,n$, obtenemos que se verifica la ecuación (2.1) para $i = 1,\dots,n$, como pretendíamos. ■

A continuación, vamos a mostrar cómo podemos extender la condición suficiente de convexidad al problema $(P_{y_n})$ basándonos en [4].

**Teorema 2.1.2** (Condición suficiente)**.** *Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $f$ una función de $2n+1$ variables de clase $C^2$ que cumple que para cada $x \in [a,b]$ el conjunto $M_x = \{(y_1,...,y_n,y_1',...,y_n') : (x,y_1,...,y_n,y_1',...,y_n')$ pertenece al dominio de definición de $f\}$ es convexo. Supongamos que $f$ restringida a $M_x$ es convexa para cada $x \in [a,b]$. Si $\overline{y_0}$ es una función admisible de clase $C^2([a,b];\mathbb{R}^n)$ que verifica la condición necesaria del Teorema 2.1.1, entonces $\overline{y_0}$ es un mínimo global del problema $(P_{y_n})$.*

**Dem:** Fijamos $x \in [a,b]$. Como $f$ es convexa sobre $M_x$, podemos aplicar la Proposición 1.3.3 y tenemos que, para cada par de puntos $(\overline{y_0},\overline{y_0}') = (y_{01},...,y_{0n},y_{01}',...,y_{0n}')$ e $(\overline{y},\overline{y}') = (y_1,...,y_n,y_1',...,y_n')$ de $M_x$,

$$f(x,y_1,...,y_n,y_1',...,y_n') \geq f(x,y_{01},...,y_{0n},y_{01}',...,y_{0n}') + \sum_{i=1}^{n} f_{y_i}(x,y_{01},...,y_{0n},y_{01}',...,y_{0n}')(y_i - y_{0i})$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} f_{y_i'}(x,y_{01},...,y_{0n},y_{01}',...,y_{0n}')(y_i' - y_{0i}').$$

Sean ahora $\overline{y}$ e $\overline{y_0}$ dos funciones admisibles, donde además $\overline{y_0}$ es de clase $C^2$ y es una solución del sistema del Teorema 2.1.1. Consideramos $J(\overline{y}) - J(\overline{y_0})$ y queremos ver que esta diferencia es mayor o igual que cero:

$$J(\overline{y}) - J(\overline{y_0}) = \int_a^b [f(x,y_1(x),...,y_n(x),y_1'(x),...,y_n'(x)) - f(x,y_{01}(x),...,y_{0n}(x),y_{01}'(x),...,y_{0n}'(x))]dx.$$

Ahora empleamos la desigualdad anterior, llegando a

$$J(\overline{y}) - J(\overline{y_0}) \geq \int_a^b \left[ \sum_{i=1}^{n} f_{y_i}^0(x)(y_i(x) - y_{0i}(x)) + \sum_{i=1}^{n} f_{y_i'}^0(x)(y_i'(x) - y_{0i}'(x)) \right] dx,$$

donde $f_{y_i}^0(x) = f_{y_i}(x,y_{01},...,y_{0n},y_{01}',...,y_{0n}')$ y $f_{y_i'}^0(x) = f_{y_i'}(x,y_{01},...,y_{0n},y_{01}',...,y_{0n}')$ para cada $i$ con $i = 1,...,n$. Integramos por partes el segundo sumatorio:

$$\int_a^b \sum_{i=1}^{n} f_{y_i'}^0(x)(y_i'(x) - y_{0i}'(x))dx = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b f_{y_i'}^0(x)(y_i'(x) - y_{0i}'(x))dx$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left( \left[ f_{y_i'}^0(x)(y_i(x) - y_{0i}(x)) \right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \frac{d}{dx}\left( f_{y_i'}^0(x) \right)(y_i(x) - y_{0i}(x))dx \right).$$

Por ser $\overline{y}$ e $\overline{y_0}$ funciones admisibles, $y_i(a) = y_{0i}(a)$ e $y_i(b) = y_{0i}(b)$ para cada $i = 1,...,n$, luego

$$J(\overline{y}) - J(\overline{y_0}) \geq \int_a^b \left[ \sum_{i=1}^{n} \left( f_{y_i}^0(x)(y_i(x) - y_{0i}(x)) \right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx}\left( f_{y_i'}^0(x) \right)(y_i(x) - y_{0i}(x)) \right] dx$$
$$= \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \left( \left( f_{y_i}^0(x) - \frac{d}{dx} f_{y_i'}^0(x) \right)(y_i(x) - y_{0i}(x)) \right) dx.$$

Ahora aplicamos que $\overline{y_0}$ es solución del sistema de ecuaciones diferenciales del Teorema 2.1.1 por hipótesis, por lo que finalmente obtenemos

$$J(\overline{y}) - J(\overline{y_0}) \geq 0,$$

como pretendíamos, luego $\overline{y_0}$ es un mínimo global del problema $(P_{y_n})$. ■

Vamos a aplicar estos dos teoremas a un ejemplo sencillo. Trabajaremos con $n = 2$ porque, cuanto más aumentamos $n$, más complicado es resolver el sistema de ecuaciones de Euler que vamos a obtener, que en general es no lineal.

**Ejemplo 2.1.3.** *Estudiar en qué funciones $\overline{y} = (y_1, y_2)$ puede alcanzar un mínimo el funcional $J(y_1, y_2) = \int_0^1 \left[ (y_1'(x))^4 + (y_2'(x))^6 + (y_1'(x))^2 + (y_2'(x))^2 - y_1'(x)y_2'(x) \right] dx$ con las condiciones de frontera $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$, $y_1(1) = 2$, $y_2(1) = 0$.*

En primer lugar, planteamos el sistema de ecuaciones diferenciales del Teorema 2.1.1:

$$\begin{cases} \left(12(y_1')^2 + 2\right) y_1'' - y_2'' = 0 \\ -y_1'' + \left(30(y_2')^4 + 2\right) y_2'' = 0. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $\left(12(y_1')^2+2\right)\left(30(y_2')^4+2\right)^2-1>0$, obtenemos que $y_1''\equiv 0$ e $y_2''\equiv 0$, luego los extremales de este problema son rectas:

$$\begin{cases} y_1(x)=Ax+B \\ y_2(x)=Cx+D \end{cases}$$

donde $A,B,C,D$ son constantes reales. Aplicando las condiciones de frontera, llegamos a que la única función $\overline{y}=(y_1,y_2)$ que puede minimizar $J$ es

$$\begin{cases} y_1(x)=2x \\ y_2(x)=-x+1. \end{cases}$$

Veamos usando el Teorema 2.1.2 que, de hecho, $\overline{y}(x)=(2x,1-x)$ es un mínimo global de $J$. Para ello, calculamos para cada $x\in[0,1]$ la matriz hessiana de $f(y_1,y_2,y_1',y_2')=(y_1')^4+(y_2')^6+(y_1')^2+(y_2')^2-y_1'y_2'$:

$$Hf=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12(y_1')^2+2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 30(y_2')^4+2 \end{pmatrix}$$

que resulta ser semidefinida positiva, por lo que efectivamente $\overline{y}(x)=(2x,1-x)$ es un mínimo absoluto de $J$.

## 2.2. La función $f$ depende de derivadas de orden superior

En este apartado, vamos a estudiar el caso en el que el funcional $J(y)$ considerado depende de una función y de sus derivadas de hasta un cierto orden $n\in\mathbb{N}$ previamente fijado, es decir,

$$J(y)=\int_a^b f\left(x,y(x),y'(x),\ldots,y^{(n)}(x)\right)dx,$$

donde $a,b\in\mathbb{R}$ son puntos fijos, como en lo considerado hasta ahora. La función $f$ depende de $n+2$ variables, será al menos de clase $C^{n+1}$ y estará definida en $G$, siendo $G$ un abierto de $\mathbb{R}^{n+2}$. Consideramos funciones admisibles $y$ a las funciones de clase $C^n$ que verifiquen que $(x,y(x),y'(x),\ldots,y^{(n)}(x))\in G$ para todo $x\in[a,b]$ y que cumplan $y(a)=y_a$, $y(b)=y_b$, $y'(a)=y_a'$, $y'(b)=y_b',\ldots,y^{(n-1)}(a)=y_a^{(n-1)}$, $y^{(n-1)}(b)=y_b^{(n-1)}$, donde $y_a,y_b,y_a',y_b',\ldots,y_a^{(n-1)},y_b^{(n-1)}\in\mathbb{R}$ son dados. En consecuencia, el problema $\left(P_{y^{(n)}}\right)$ tiene la siguiente forma, recordando que $a,b,y_a,y_b,y_a',y_b',\ldots,y_a^{(n-1)},y_b^{(n-1)}\in\mathbb{R}$ están fijados:

$$\left(P_{y^{(n)}}\right):\begin{cases} \text{Encontrar } y \text{ función que minimiza } \int_a^b f(x,y(x),y'(x),\ldots,y^{(n)}(x))dx \\ \text{sujeto a } y\in C^n([a,b]) \text{ tal que} \\ y(a)=y_a,\ y(b)=y_b,\ y'(a)=y_a',\ y'(b)=y_b',\ldots,y^{(n-1)}(a)=y_a^{(n-1)},\ y^{(n-1)}(b)=y_b^{(n-1)}. \end{cases}$$

Es claro que cuando $n=1$, tenemos el problema básico $(P)$ ya estudiado, por lo que las condiciones que aquí obtengamos deben de ser coherentes con lo visto en aquel capítulo.

Comenzamos con la condición necesaria, que para $n=1$ coincidirá con la Condición de Euler (Teorema 1.2.1). Obtendremos una ecuación diferencial ordinaria de orden $2n$, denominada *ecuación de Euler-Poisson*, cuyas soluciones de clase $C^{2n}$ serán llamadas *extremales* (ver [6], por ejemplo).

**Teorema 2.2.1** (Condición necesaria). *Sea $n\in\mathbb{N}$. Sea $f$ una función de $n+2$ variables de clase $C^{n+1}$. Sea $y_0\in C^{2n}([a,b])$ un mínimo relativo (débil o fuerte) del problema $\left(P_{y^{(n)}}\right)$, entonces $y_0$ verifica la ecuación de Euler-Poisson:*

$$f_y^0(x)-\frac{d}{dx}f_{y'}^0(x)+\frac{d^2}{dx^2}f_{y''}^0(x)+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}f_{y^{(n)}}^0(x)=0\quad\forall x\in(a,b), \tag{2.2}$$

*donde* $f_y^0(x) = f_y\left(x, y_0(x), y_0'(x), \ldots, y_0^{(n)}(x)\right), \ldots, f_{y^{(n)}}^0(x) = f_{y^{(n)}}\left(x, y_0(x), y_0'(x), \ldots, y_0^{(n)}(x)\right)$.

**Dem:** Vamos a proceder como en la demostración de la Condición de Euler. Para ello, en primer lugar, consideramos el subconjunto de las funciones admisibles para el problema $\left(P_{y^{(n)}}\right)$ dado por las funciones (admisibles) definidas en $[a,b]$ de la forma $y_\alpha(x) = y_0(x) + \alpha Y(x)$, con $|\alpha| < \alpha_0$, siendo $\alpha_0$ un número estrictamente positivo lo suficientemente pequeño, e $Y(x)$ una función de clase $C^n$ fijada con $Y(a) = Y(b) = Y'(a) = Y'(b) = \ldots = Y^{(n-1)}(a) = Y^{(n-1)}(b) = 0$.

Podemos ver que las funciones $y_\alpha$ son admisibles para el problema $\left(P_{y^{(n)}}\right)$. Tenemos entonces un subconjunto de funciones del conjunto admisible de $\left(P_{y^{(n)}}\right)$ que dependen del parámetro y, de esta forma, podemos considerar el problema de minimizar el funcional $J$ dentro de este subconjunto y relacionar dicho problema con uno de optimización de una función de una sola variable, como ya habíamos dicho. Así, $J(y_\alpha)$ depende sólo del valor de $\alpha$ y podemos definir

$$\Phi(\alpha) = J(y_\alpha) = \int_a^b f\left(x, y_0(x) + \alpha Y(x), y_0'(x) + \alpha Y'(x), \ldots, y_0^{(n)}(x) + \alpha Y^{(n)}(x)\right) dx.$$

Como por hipótesis $y_0$ es mínimo relativo del problema $\left(P_{y^{(n)}}\right)$ y $d_0(y_0, y_\alpha) \leq c_0\alpha$ y $d_1(y_0, y_\alpha) \leq c_1\alpha$ para ciertas constantes $c_0, c_1$ independientes de $\alpha$, existe $\alpha_0$ tal que $\Phi(\alpha) = J(y_\alpha) \geq J(y_0) = \Phi(0)$ para todo $|\alpha| < \alpha_0$. En consecuencia, $\Phi$ posee un mínimo local en $\alpha = 0$, por lo que su derivada $\Phi'(0)$ se anula. Por otro lado, podemos derivar la expresión de $\Phi$ utilizando la fórmula de Leibniz (Lema 1.1.2):

$$\begin{aligned}\Phi'(\alpha) = \int_a^b \Big[ & f_y\left(x, y_0(x) + \alpha Y(x), y_0'(x) + \alpha Y'(x), \ldots, y_0^{(n)}(x) + \alpha Y^{(n)}(x)\right) Y(x) \\ & + f_{y'}\left(x, y_0(x) + \alpha Y(x), y_0'(x) + \alpha Y'(x), \ldots, y_0^{(n)}(x) + \alpha Y^{(n)}(x)\right) Y'(x) + \ldots \\ & + f_{y^{(n)}}\left(x, y_0(x) + \alpha Y(x), y_0'(x) + \alpha Y'(x), \ldots, y_0^{(n)}(x) + \alpha Y^{(n)}(x)\right) Y^{(n)}(x)\Big] dx.\end{aligned}$$

Evaluando en $\alpha = 0$,

$$\Phi'(0) = \int_a^b \left[f_y^0(x)Y(x) + f_{y'}^0(x)Y'(x) + \ldots + f_{y^{(n)}}^0(x)Y^{(n)}(x)\right] dx, \tag{2.3}$$

con $f_y^0(x) = f_y\left(x, y_0(x), y_0'(x), \ldots, y_0^{(n)}(x)\right)$ y análogamente para el resto. Ahora vamos a integrar por partes varias veces todos los sumandos de la expresión anterior excepto el primero.

En primer lugar, integramos por partes una vez el segundo sumando y usamos que $Y(a) = Y(b) = 0$:

$$\int_a^b f_{y'}^0(x)Y'(x)dx = \left[f_{y'}^0(x)Y(x)\right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(f_{y'}^0(x)\right) Y(x)dx = -\int_a^b \frac{d}{dx}\left(f_{y'}^0(x)\right) Y(x)dx.$$

A continuación, aplicamos integración por partes dos veces al tercer sumando y empleamos que $Y(a) = Y(b) = Y'(a) = Y'(b) = 0$:

$$\begin{aligned}\int_a^b f_{y''}^0(x)Y''(x)dx &= \left[f_{y''}^0(x)Y'(x)\right]_{x=a}^{x=b} - \left[\frac{d}{dx}\left(f_{y''}^0(x)\right) Y(x)\right]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \frac{d^2}{dx^2}\left(f_{y''}^0(x)\right) Y(x)dx \\ &= \int_a^b \frac{d^2}{dx^2}\left(f_{y''}^0(x)\right) Y(x)dx.\end{aligned}$$

De esta manera, integramos por partes $i$ veces el sumando $i+1$, usando las propiedades de $Y$, hasta llegar al sumando enésimo, al que, como hemos dicho, le aplicaremos este método de integración $n-1$ veces, obteniendo

$$\int_a^b f_{y^{(n)}}^0(x)Y^{(n)}(x)dx = \left[f_{y^{(n)}}^0(x)Y^{(n-1)}(x)\right]_{x=a}^{x=b} - \left[\frac{d}{dx}\left(f_{y^{(n)}}^0(x)\right) Y^{(n-2)}(x)\right]_{x=a}^{x=b} + \ldots$$

$$+(-1)^n \int_a^b \frac{d^n}{dx^n}\left(f^0_{y^{(n)}}(x)\right) Y(x)dx = (-1)^n \int_a^b \frac{d^n}{dx^n}\left(f^0_{y^{(n)}}(x)\right) Y(x)dx,$$

ya que $Y(a) = Y(b) = Y'(a) = Y'(b) = \ldots = Y^{(n-1)}(a) = Y^{(n-1)}(b) = 0$. Por lo tanto, sacando factor común a $Y(x)$, la expresión (2.3) queda

$$\Phi'(0) = \int_a^b \left[f^0_y(x) - \frac{d}{dx}f^0_{y'}(x) + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f^0_{y^{(n)}}(x)\right] Y(x)dx = 0.$$

Ahora utilizamos el Lema fundamental del cálculo de variaciones (Lema 1.1.3) con una ligera diferencia, ya que en este caso la función $Y$ considerada no es sólo continua sino que también ha de cumplir que sea de clase $C^n$ verificando $Y(a) = Y(b) = Y'(a) = Y'(b) = ... = Y^{(n-1)}(a) = Y^{(n-1)}(b) = 0$, como ya dijimos antes. El lema sigue siendo válido y la demostración es análoga a la hecha en su momento.

Por lo tanto, aplicando el lema, tenemos que

$$f^0_y(x) - \frac{d}{dx}f^0_{y'}(x) + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f^0_{y^{(n)}}(x) = 0,$$

que es a lo que queríamos llegar. ■

En cuanto a la condición suficiente de convexidad, es prácticamente idéntica a la dada en el Teorema 1.3.5, simplemente hay que adaptarla ligeramente al problema $\left(P_{y^{(n)}}\right)$ teniendo en cuenta lo enunciado en el Teorema 2.2.1.

**Teorema 2.2.2** (Condición suficiente)**.** *Sea $n \in \mathbb{N}$. Consideramos $f$ una función de $n+2$ variables de clase $C^{n+1}$ que cumple que para cada $x \in [a,b]$ el conjunto $M_x = \{(y, y', ..., y^{(n)}) : (x, y, y', ..., y^{(n)})$ pertenece al dominio de definición de $f\}$ es convexo. Supongamos que $f$ restringida a $M_x$ es convexa para cada $x \in [a,b]$. Si $y_0 \in C^{2n}([a,b])$ es una función admisible que verifica la ecuación de Euler-Poisson* (2.2)*, entonces $y_0$ es un mínimo global del problema $\left(P_{y^{(n)}}\right)$.*

**Dem:** La prueba trata básicamente de adaptar a este caso lo hecho en la demostración del Teorema 1.3.5.

Fijamos $x \in [a,b]$ y $n \in \mathbb{N}$. Puesto que la función $f$ es convexa sobre $M_x$, aplicamos la Proposición 1.3.3 y tenemos que, para cada par de puntos $(y_0, y_0', ..., y_0^{(n)})$ e $(y, y', ..., y^{(n)})$ de $M_x$,

$$f(x, y, y', ..., y^{(n)}) \geq f(x, y_0, y_0', ..., y_0^{(n)}) + \nabla f(x, y_0, y_0', ..., y_0^{(n)}) \cdot \left((y, y', ..., y^{(n)}) - (y_0, y_0', ..., y_0^{(n)})\right)^T. \tag{2.4}$$

Sean ahora $y$ e $y_0$ funciones admisibles, con $y_0$ de clase $C^{2n}$ una solución de la ecuación de Euler-Poisson (2.2). Consideramos $J(y) - J(y_0)$ y queremos ver que esta diferencia es no negativa:

$$J(y) - J(y_0) = \int_a^b \left[f(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) - f(x, y_0(x), y_0'(x), ..., y_0^{(n)}(x))\right] dx.$$

Utilizando la desigualdad (2.4), obtenemos

$$J(y) - J(y_0) \geq \int_a^b \left[f^0_y(x)(y(x) - y_0(x)) + \sum_{i=1}^n f^0_{y^{(i)}}(x)(y^{(i)}(x) - y_0^{(i)}(x))\right] dx, \tag{2.5}$$

con $f^0_y(x) = f_y\left(x, y_0(x), y_0'(x), ..., y_0^{(n)}(x)\right)$ y $f^0_{y^{(i)}}(x) = f_{y^{(i)}}\left(x, y_0(x), y_0'(x), ..., y_0^{(n)}(x)\right)$ para cada $i$ con $i = 1, ..., n$. Ahora integramos por partes los términos del sumatorio anterior. Procedemos como en la prueba del Teorema 2.2.1, es decir, aplicamos partes $i$ veces en el sumando $i$, para $i = 1, ..., n$ y luego usamos que $y(a) = y_0(a)$, $y(b) = y_0(b)$, $y'(a) = y_0'(a)$, $y'(b) = y_0'(b)$,..., $y^{(n-1)}(a) = y_0^{(n-1)}(a)$,

$y^{(n-1)}(b) = y_0^{(n-1)}(b)$, puesto que tanto $y$ como $y_0$ son funciones admisibles para nuestro problema. De esta manera, en el primer caso tenemos

$$\int_a^b f^0_{y'}(x)\left(y'(x) - y_0'(x)\right) dx = \left[f^0_{y'}(x)\left(y(x) - y_0(x)\right)\right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(f^0_{y'}(x)\right)\left(y(x) - y_0(x)\right) dx$$
$$= -\int_a^b \frac{d}{dx}\left(f^0_{y'}(x)\right)\left(y(x) - y_0(x)\right) dx.$$

En segundo lugar,

$$\int_a^b f^0_{y''}(x)\left(y''(x) - y_0''(x)\right) dx = \left[f^0_{y''}(x)\left(y'(x) - y_0'(x)\right)\right]_{x=a}^{x=b} - \left[\frac{d}{dx}\left(f^0_{y''}(x)\right)\left(y(x) - y_0(x)\right)\right]_{x=a}^{x=b}$$
$$+\int_a^b \frac{d^2}{dx^2}\left(f^0_{y''}(x)\right)\left(y(x) - y_0(x)\right) dx = \int_a^b \frac{d^2}{dx^2}\left(f^0_{y''}(x)\right)\left(y(x) - y_0(x)\right) dx.$$

Y así sucesivamente hasta el enésimo sumando

$$\int_a^b f^0_{y^{(n)}}(x)\left(y^{(n)}(x) - y_0^{(n)}(x)\right) dx = \left[f^0_{y^{(n)}}(x)\left(y^{(n-1)}(x) - y_0^{(n-1)}(x)\right)\right]_{x=a}^{x=b}$$
$$-\left[\frac{d}{dx}\left(f^0_{y^{(n)}}(x)\right)\left(y^{(n-2)}(x) - y_0^{(n-2)}(x)\right)\right]_{x=a}^{x=b} + ... + (-1)^n \int_a^b \frac{d^n}{dx^n}\left(f^0_{y^{(n)}}(x)\right)\left(y(x) - y_0(x)\right) dx$$
$$= (-1)^n \int_a^b \frac{d^n}{dx^n}\left(f^0_{y^{(n)}}(x)\right)\left(y(x) - y_0(x)\right) dx.$$

Usando los cálculos anteriores a la expresión (2.5) y sacando factor común a $y(x) - y_0(x)$ llegamos a

$$J(y) - J(y_0) \geq \int_a^b \left[f^0_y(x) - \frac{d}{dx}\left(f^0_{y'}(x)\right) + ... + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(f^0_{y^{(n)}}(x)\right)\right]\left(y(x) - y_0(x)\right) dx = 0,$$

donde la última igualdad se sigue de que la función $y_0$ es solución de la ecuación (2.2) en el intervalo $(a, b)$. En consecuencia, $y_0$ es un mínimo global del problema $\left(P_{y^{(n)}}\right)$. ■

Vamos a intentar aplicar estos dos últimos teoremas a un ejemplo práctico. Como en el caso anterior, tomaremos $n = 2$ para que la ecuación que obtengamos sea sencilla de resolver.

**Ejemplo 2.2.3.** *Estudiar sobre qué funciones puede alcanzar un mínimo el funcional siguiente definido por* $J(y) = \int_0^{2\pi} \left[(y''(x))^2 - (y'(x))^2 - x + 1\right] dx$ *con las condiciones* $y(0) = 0$, $y(2\pi) = 2\pi$, $y'(0) = 0$, $y'(2\pi) = m$, *con* $m \in \mathbb{R}$.

En primer lugar, planteamos la ecuación de Euler-Poisson del Teorema 2.2.1, que queda de la forma $y'''' + y'' = 0$, ecuación diferencial lineal de cuarto orden con coeficientes constantes. La solución general es $y(x) = A + Bx + C\sin(x) + D\cos(x)$ con $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Aplicando las condiciones de frontera obtenemos un sistema $4 \times 4$ dependiente del parámetro $m$

$$\begin{cases} A + D & = 0 \\ A + 2\pi B + D & = 2\pi \\ B + C & = 0 \\ B + C & = m. \end{cases}$$

Si $m = 0$, el sistema tiene infinitas soluciones y todas las funciones de la forma $y(x) = A(1 - \cos(x)) + x - \sin(x)$ son extremales admisibles para este problema, con $A \in \mathbb{R}$. Si $m \neq 0$, el sistema es incompatible y no hay ninguna función de clase $C^{2n}$ que sea un mínimo de $J$. Este ejemplo pone de manifiesto que la condición necesaria no siempre proporciona un único candidato a mínimo.

Por otro lado, no vamos a poder usar la condición suficiente del Teorema 2.2.2 en este ejemplo, ya que, fijado $x \in [a,b]$, la matriz hessiana de la función $f(y, y', y'') = (y'')^2 - (y')^2 - x + 1$ es

$$Hf = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que no es semidefinida positiva, con lo cual no podemos garantizar que cuando $m = 0$, las funciones $y$ sean un mínimo global del funcional. Como vemos en este caso, no siempre nos va a ser posible utilizar la condición suficiente para poder asegurar que los extremales que cumplen la condición necesaria del problema son mínimos globales. No obstante, si calculamos el valor del funcional en estas funciones, obtenemos que $J(y) = -2\pi^2$ independientemente del valor de $A$, por lo que es bastante probable que el funcional tenga un mínimo absoluto en cada una de las funciones $y$ obtenidas.

## 2.3. La función $f$ depende de dos variables independientes

En este apartado, vamos a considerar un funcional $J$ dependiente de dos variables independientes y de una función y de sus derivadas parciales. Nos basaremos principalmente en [6] y [13]. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ fijos, sea $c(t) = (x(t), z(t))$, donde $t \in [a,b]$, una curva cerrada simple regular a trozos en el plano XZ. Por el Teorema de la curva de Jordan, $c$ divide al plano XZ en dos conjuntos disjuntos llamados interior y exterior. Vamos a considerar $D$ la región del plano dada por la unión del interior delimitado por la curva $c$ y la propia curva $c$. Por consiguiente, $D$ es simplemente conexo, cerrado y acotado. Con todo lo anterior, ahora suponemos que $J$ tiene la forma siguiente:

$$J(y) = \iint_D f\left(x, z, y(x,z), \frac{\partial y}{\partial x}(x,z), \frac{\partial y}{\partial z}(x,z)\right) dxdz.$$

La función $f$ depende de 5 variables, es de clase $C^2$ y está definida en un abierto $G$ de $\mathbb{R}^5$. Con respecto a la funciones admisibles $y$, son aquellas que están definidas en $D$, son de clase $C^1$ y cumplen que $\left(x, z, y(x,z), \frac{\partial y}{\partial x}(x,z), \frac{\partial y}{\partial z}(x,z)\right) \in G,$ para todo $(x,z) \in D$ (en el caso de que el dominio de $f$ no sea directamente $\mathbb{R}^5$). Además, también verifican que $y\,(x(t), z(t)) = g(t)$ para todo $t \in [a,b]$, donde $g$ es de clase $C^1$ a trozos con $g(a) = g(b)$. Con todo lo anterior, el problema $\left(P_{(x,z)}\right)$ queda de la siguiente forma, fijados $a, b \in \mathbb{R}$, la curva $c$ y la función $g$:

$$\left(P_{(x,z)}\right) : \begin{cases} \text{Encontrar } y \text{ función que minimiza } \iint_D f\left(x, z, y(x,z), \dfrac{\partial y}{\partial x}(x,z), \dfrac{\partial y}{\partial z}(x,z)\right) dxdz \\ \text{sujeto a } y \in C^1(D) \text{ tal que } y\,(x(t), z(t)) = g(t) \text{ para todo } t \in [a,b]. \end{cases}$$

Por comodidad, en ocasiones denotaremos $y_x = \frac{\partial y}{\partial x}$ e $y_z = \frac{\partial y}{\partial z}$. Vamos a extender las nociones de distancia $d_0$ y $d_1$ al problema $\left(P_{(x,z)}\right)$ para poder trabajar con mínimos relativos fuertes y débiles. Dadas dos funciones $y, u$ continuas en $D$ definimos:

$$d_0(y,u) = \max_{(x,z)\in D} |y(x,z) - u(x,z)|,$$

y si $y, u \in C^1(D)$,

$$d_1(y,u) = \max_{(x,z)\in D} |y(x,z) - u(x,z)| + \max_{(x,z)\in D} |y_x(x,z) - u_x(x,z)| + \max_{(x,z)\in D} |y_z(x,z) - u_z(x,z)|.$$

También necesitaremos extender el Lema fundamental del cálculo de variaciones para poder aplicarlo con dos variables independientes.

**Lema 2.3.1.** *Sea $\psi : D \to \mathbb{R}$ una función continua. Si para cada función $Y : D \to \mathbb{R}$ continua se verifica que*

$$\iint_D \psi(x,z)Y(x,z)dxdz = 0,$$

*entonces $\psi(x,z) = 0$ para todo $(x,z) \in D$.*

**Dem:** Supongamos que $\psi(x_0,z_0) \neq 0$ para un cierto $(x_0,z_0) \in D$. Como $\psi$ es continua, existe $(x_1,z_1) \in int(D)$ tal que $\psi(x_1,z_1)$ no cambia de signo y una bola abierta $B$ (con respecto a la distancia euclídea) de centro $(x_1,z_1)$ y radio $r$ tal que $\psi(x,z)$ conserva su signo para todo $(x,z) \in B$. Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos la función $Y : D \to \mathbb{R}$:

$$Y(x,z) = \begin{cases} \left[(x-x_1)^2 + (z-z_1)^2 - r^2\right]^{2n} & \text{si } (x,z) \in B, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La función $Y$ es continua, se anula en la frontera de $D$ y es no negativa en todo su dominio. De esta forma, tenemos

$$\iint_D \psi(x,z)Y(x,z)dxdz = \iint_B \psi(x,z)Y(x,z)dxdz \neq 0,$$

lo cual contradice nuestra hipótesis. ■

Como en el caso del Lema fundamental del cálculo de variaciones, el resultado y la demostración también son válidos si las funciones $Y$ son de clase $C^1$ y se anulan en la frontera de $D$.

A continuación, enunciamos un teorema de cálculo integral que utilizaremos para probar las condiciones necesaria y suficiente. Es una versión más general que la vista en [2] y está accesible en [1].

**Teorema 2.3.2** (Teorema de Green-Riemann)**.** *Sea $c$ una curva cerrada simple regular a trozos, positivamente orientada, en el plano $\mathbb{R}^2$, y sea $D$ la unión de la región interior a $c$ con la propia curva $c$. Sea $F = (M,N) : D \to \mathbb{R}^2$ una función vectorial de clase $C^1$. Entonces se tiene que*

$$\iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) dxdz = \int_c (Ndz + Mdx).$$

Por último, vamos a proporcionar una versión más débil que la fórmula de Leibniz dada en el Lema 1.1.2, ya que en este caso el dominio de integración será fijo, pero adaptada al caso de integrales dobles, cuya demostración puede consultarse en [12].

**Teorema 2.3.3** (Derivación bajo el signo de integral)**.** *Sean $I$ un intervalo en $\mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible-Lebesgue y $f : D \times I \to \mathbb{R}$ verificando:*

- *Para todo $t \in I$ la función $f(\cdot,t)$ es medible en $D$, y además existe $t_0 \in I$ tal que $f(\cdot,t_0)$ es integrable en $D$.*
- *Para casi todo $x \in D$ la función $f(x,\cdot)$ es de clase $C^1$ en $I$.*
- *Existe $g : D \to \mathbb{R}$ integrable-Lebesgue en $D$ tal que para todo $t \in I$ y para casi todo $x \in D$ se tiene que $\left|\frac{df}{dt}(x,t)\right| \leq g(x)$.*

*Entonces la función $F(t) = \int_D f(x,t)dx$ es de clase $C^1$ en $I$ y $F'(t) = \int_D \frac{df}{dt}(x,t)dx$.*

Una vez planteado formalmente el problema, proponemos una condición necesaria para que exista mínimo relativo de nuestro problema, que es una extensión al problema $\left(P_{(x,z)}\right)$ de la Condición de Euler (Teorema 1.2.1). Obtendremos una ecuación diferencial en derivadas parciales de orden 2, denominada *ecuación de Ostrogradski*, cuyas soluciones de clase $C^2$ serán llamadas *extremales*.

**Teorema 2.3.4** (Condición necesaria)**.** *Sean $f$ una función de 5 variables de clase $C^2$ e $y_0 \in C^2(D)$ un mínimo relativo (débil o fuerte) del problema $\left(P_{(x,z)}\right)$, entonces $y_0$ verifica la ecuación de Ostrogradski:*

$$f_y^0(x,z) - \frac{\partial f_{y_x}^0}{\partial x}(x,z) - \frac{\partial f_{y_z}^0}{\partial z}(x,z) = 0 \quad \forall (x,z) \in int(D), \tag{2.6}$$

*donde* $f_y^0(x,z) = f_y\left(x,z,y_0(x,z),\frac{\partial y_0}{\partial x}(x,z),\frac{\partial y_0}{\partial z}(x,z)\right)$ *y análogamente para* $f_{y_x}^0(x,z)$ *y* $f_{y_z}^0(x,z)$.

**Dem:** Como ya hemos hecho en varias ocasiones, la demostración consistirá en adaptar la de la Condición de Euler al problema $\left(P_{(x,z)}\right)$.

En primer lugar, consideramos el subconjunto de las funciones admisibles para nuestro problema dado por las funciones (admisibles) definidas en $D$ que son de la forma $y_\alpha(x,z) = y_0(x,z) + \alpha Y(x,z)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ verificando $|\alpha| < \alpha_0$, siendo $\alpha_0$ un número mayor que cero lo suficientemente pequeño, e $Y$ una función de clase $C^1$ fijada que se anula en la frontera $\partial D$ de $D$.

Puesto que las funciones $y_\alpha$ son admisibles para $\left(P_{(x,z)}\right)$ al ser de clase $C^1$ y tomar el mismo valor en la frontera de $D$ que $y_0$, podemos plantearnos el problema de minimizar el funcional $J$ sólo sobre las funciones admisibles de esta forma. Por lo tanto, nuestro nuevo problema depende únicamente del parámetro $\alpha$ y eso lo convierte en un problema de minimización de una función real de una variable. De esta forma, definimos la función $\Phi$:

$$\Phi(\alpha) = \iint_D f\left(x,z,y_0(x,z)+\alpha Y(x,z),\frac{\partial y_0}{\partial x}(x,z)+\alpha\frac{\partial Y}{\partial x}(x,z),\frac{\partial y_0}{\partial z}(x,z)+\alpha\frac{\partial Y}{\partial z}(x,z)\right)dxdz.$$

Como hemos supuesto que $y_0$ es mínimo relativo del problema $\left(P_{(x,z)}\right)$ y además $d_0(y_0,y_\alpha) \le c_0\alpha$ y $d_1(y_0,y_\alpha) \le c_1\alpha$ para ciertas constantes $c_0, c_1$ independientes de $\alpha$, sabemos que existe $\alpha_0$ tal que $\Phi(\alpha) = J(y_\alpha) \ge J(y_0) = \Phi(0)$ para todo $|\alpha| < \alpha_0$. Por lo tanto, tenemos que $\Phi$ tiene un mínimo local en $\alpha = 0$, luego $\Phi'(0) = 0$. Además, usando el Teorema 2.3.3 podemos obtener la derivada de $\Phi$:

$$\Phi'(\alpha) = \iint_D \left[f_y^\alpha(x,z)Y(x,z) + f_{y_x}^\alpha(x,z)\frac{\partial Y}{\partial x}(x,z) + f_{y_z}^\alpha(x,z)\frac{\partial Y}{\partial z}(x,z)\right]dxdz,$$

donde $f_y^\alpha(x,z) = f_y\left(x,z,y_0(x,z)+\alpha Y(x,z),\frac{\partial y_0}{\partial x}(x,z)+\alpha\frac{\partial Y}{\partial x}(x,z),\frac{\partial y_0}{\partial z}(x,z)+\alpha\frac{\partial Y}{\partial z}(x,z)\right)$ y análogamente en el caso de $f_{y_x}^\alpha(x,z)$ y de $f_{y_z}^\alpha(x,z)$. A continuación, evaluamos $\Phi'$ en $\alpha = 0$,

$$\Phi'(0) = \iint_D \left[f_y^0(x,z)Y(x,z) + f_{y_x}^0(x,z)\frac{\partial Y}{\partial x}(x,z) + f_{y_z}^0(x,z)\frac{\partial Y}{\partial z}(x,z)\right]dxdz. \tag{2.7}$$

Ahora vamos a usar el Teorema de Green-Riemann que enunciamos con anterioridad. Si llamamos $M(x,z) = -f_{y_z}^0(x,z)Y(x,z)$ y $N(x,z) = f_{y_x}^0(x,z)Y(x,z)$, tenemos que

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,z) - \frac{\partial M}{\partial z}(x,z) = \frac{\partial Y}{\partial x}(x,z)f_{y_x}^0(x,z) + \frac{\partial Y}{\partial z}(x,z)f_{y_z}^0(x,z) + Y(x,z)\left(\frac{\partial f_{y_x}^0}{\partial x}(x,z) + \frac{\partial f_{y_z}^0}{\partial z}(x,z)\right).$$

Aplicando el teorema,

$$\iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x}(x,z) - \frac{\partial M}{\partial z}(x,z)\right)dxdz = \int_{\partial D} Y(x,z)\left(f_{y_x}^0(x,z)dz - f_{y_z}^0(x,z)dx\right) = 0,$$

donde la última igualdad se debe a que habíamos supuesto que $Y$ se anulaba en todos los puntos de $\partial D$. En consecuencia,

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x}(x,z)f_{y_x}^0(x,z) + \frac{\partial Y}{\partial z}(x,z)f_{y_z}^0(x,z)\right)dxdz = -\iint_D Y(x,z)\left(\frac{\partial f_{y_x}^0}{\partial x}(x,z) + \frac{\partial f_{y_z}^0}{\partial z}(x,z)\right)dxdz.$$

Usando esta última igualdad, sustituimos en la expresión (2.7) y obtenemos

$$\Phi'(0) = \iint_D \left( f_y^0(x,z) - \frac{\partial f_{y_x}^0}{\partial x}(x,z) - \frac{\partial f_{y_z}^0}{\partial z}(x,z) \right) Y(x,z) dx dz = 0.$$

Aplicando el Lema 2.3.1, obtenemos la ecuación (2.6), como pretendíamos. ∎

Hemos obtenido una condición necesaria que es interesante desde un punto de vista teórico pero que será normalmente muy complicada de llevar a la práctica, ya que la expresión (2.6) es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden que será no lineal en general. En la mayoría de las ocasiones, este tipo de ecuaciones no se pueden resolver analíticamente, lo que limita la utilidad del teorema.

Como hemos hecho con los otros casos de este capítulo, a continuación presentamos la condición suficiente de convexidad, basándonos en [4], aunque allí se trabaja con un caso más general. Es similar a las anteriores pero adaptada al caso de dos variables independientes del problema $\left(P_{(x,z)}\right)$.

**Teorema 2.3.5** (Condición suficiente)**.** *Sea $f$ una función de 5 variables de clase $C^2$ que cumple que para cada $(x,z) \in D$ el conjunto $M_{(x,z)} = \{(y, y_x, y_z) : (x,z,y,y_x,y_z)$ pertenece al dominio de definición de $f\}$ es convexo. Supongamos que $f$ restringida a $M_{(x,z)}$ es convexa para cada $(x,z) \in D$. Si $y_0 \in C^2(D)$ es una función admisible que verifica la ecuación de Ostrogradski (2.6), entonces $y_0$ es un mínimo global del problema $\left(P_{(x,z)}\right)$.*

**Dem:** La prueba consiste básicamente en aplicar primero la Proposición 1.3.3, para después usar que la función $y_0$ candidata a ser un mínimo absoluto cumple la condición necesaria del Teorema 2.3.4.

En primer lugar, fijamos $(x,z) \in D$. Como $f$ es convexa sobre $M_{(x,z)}$, usamos la susodicha proposición, con lo que obtenemos

$$f\left(x,z,y,\frac{\partial y}{\partial x},\frac{\partial y}{\partial z}\right) \geq f\left(x,z,y_0,\frac{\partial y_0}{\partial x},\frac{\partial y_0}{\partial z}\right) + \nabla f\left(x,z,y_0,\frac{\partial y_0}{\partial x},\frac{\partial y_0}{\partial z}\right)\left(\left(y,\frac{\partial y}{\partial x},\frac{\partial y}{\partial z}\right) - \left(y_0,\frac{\partial y_0}{\partial x},\frac{\partial y_0}{\partial z}\right)\right)^T$$

para cada par de puntos $\left(y,\frac{\partial y}{\partial x},\frac{\partial y}{\partial z}\right)$ y $\left(y_0,\frac{\partial y_0}{\partial x},\frac{\partial y_0}{\partial z}\right)$ de $M_{(x,z)}$.

Sean ahora $y$ e $y_0$ dos funciones admisibles para el problema $\left(P_{(x,z)}\right)$, donde $y_0$ es además una solución de clase $C^2(D)$ de la ecuación (2.6). Queremos ver que $y_0$ es un mínimo global, luego basta ver que $J(y) - J(y_0) \geq 0$. Tenemos

$$J(y) - J(y_0) = \iint_D \left( f\left(x,z,y,\frac{\partial y}{\partial x},\frac{\partial y}{\partial z}\right) - f\left(x,z,y_0,\frac{\partial y_0}{\partial x},\frac{\partial y_0}{\partial z}\right)\right) dx dz$$

y empleando la desigualdad vista con anterioridad llegamos a

$$J(y) - J(y_0) \geq \iint_D \left[ f_y^0 (y - y_0) + f_{y_x}^0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y_0}{\partial x}\right) + f_{y_z}^0 \left(\frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial y_0}{\partial z}\right)\right] dx dz, \tag{2.8}$$

donde $f_y^0 = f_y\left(x,z,y_0(x,z),\frac{\partial y_0}{\partial x}(x,z),\frac{\partial y_0}{\partial z}(x,z)\right)$ y análogamente para $f_{y_x}^0$ y $f_{y_z}^0$. Aplicamos el Teorema de Green-Riemann a los dos últimos sumandos, llamando $M = -f_{y_z}^0(y - y_0)$ y $N = f_{y_x}^0(y - y_0)$, y tenemos que

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z} = f_{y_x}^0 \frac{\partial (y - y_0)}{\partial x} + f_{y_z}^0 \frac{\partial (y - y_0)}{\partial z} + (y - y_0)\left(\frac{\partial f_{y_x}^0}{\partial x} + \frac{\partial f_{y_z}^0}{\partial z}\right).$$

Aplicando el teorema,

$$\iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) dxdz = \int_{\partial D} (y - y_0)\left(f^0_{y_x} dz - f^0_{y_z} dx\right) = 0,$$

donde la última igualdad es debida a que, por ser $y$ e $y_0$ funciones admisibles, las dos toman los mismos valores para cada $(x, z) \in \partial D$. De aquí deducimos

$$\iint_D \left[f^0_{y_x} \frac{\partial(y-y_0)}{\partial x} + f^0_{y_z} \frac{\partial(y-y_0)}{\partial z}\right] dxdz = -\iint_D (y - y_0)\left(\frac{\partial f^0_{y_x}}{\partial x} + \frac{\partial f^0_{y_z}}{\partial z}\right) dxdz.$$

Sustituyendo en (2.8) y sacando factor común obtenemos

$$J(y) - J(y_0) \geq \iint_D \left(f^0_y - \frac{\partial f^0_{y_x}}{\partial x} - \frac{\partial f^0_{y_z}}{\partial z}\right)(y - y_0) dxdz = 0,$$

ya que $y_0$ era solución de la ecuación de Ostrogradski en $D$ por hipótesis. Por consiguiente, $y_0$ es un mínimo global del problema $\left(P_{(x,z)}\right)$. ■

Para mostrar la aplicación de la condición necesaria del Teorema 2.3.4 vamos a proponer un ejemplo sencillo donde sabemos resolver la correspondiente ecuación de Ostrogradski de forma analítica.

**Ejemplo 2.3.6.** *Estudiar las condiciones necesaria y suficiente para que el funcional*

$$J(y) = \iint_D \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2\right] dxdz$$

*posea mínimo, donde $D$ está delimitada por el cuadrado de lado $2$ y con vértice inferior izquierdo sobre el origen. Además, toda función admisible ha de anularse sobre los $4$ bordes del cuadrado salvo en el inferior, donde tiene que ser igual a la función $g(t) = t^2(t - 2)$ con $t \in [0, 2]$.*

La ecuación de Ostrogradski para este caso es la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0.$$

Usando el método de separación de variables como en [7], obtenemos una solución de la ecuación anterior que viene dada en serie de Fourier:

$$y(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\left[a_n \cosh\left(\frac{n\pi z}{2}\right) + b_n \sinh\left(\frac{n\pi z}{2}\right)\right].$$

Para calcular los coeficientes $a_n$ y $b_n$ utilizamos las condiciones de frontera. Como $y(x, 0) = g(x)$ para $x \in [0, 2]$, para cada $n \in \mathbb{N}$ el coeficiente $a_n$ se obtiene al calcular la integral $\int_0^2 g(x) \sin(n\pi x/2)\, dx$, luego $a_n = (64(-1)^n + 32)/(n^3\pi^3)$. En cuanto a $b_n$, como $y(x, 2) = 0$ para $x \in [0, 2]$, tenemos que

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\left[a_n \cosh(n\pi) + b_n \sinh(n\pi)\right].$$

Por lo tanto, $a_n \cosh(n\pi) + b_n \sinh(n\pi) = 0$ para cada $n$ y despejando llegamos a $b_n = -a_n/\tanh(n\pi)$.

Por otro lado, vemos que para cada $(x, z) \in D$ fijo, la función $f\left(y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2$ es convexa, ya que la matriz hessiana es

$$Hf = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que es semidefinida positiva. Por lo tanto, la función $y$ es un mínimo global de $J$.

# Capítulo 3

# Extensión a otros conjuntos de funciones admisibles

En el capítulo anterior hemos trabajado con distintos problemas que surgían cuando cambiábamos la función $f$ a integrar por otras más generales. Por el contrario, ahora vamos a estudiar nuevos problemas que surgen al variar el conjunto de funciones admisibles. En primer lugar, consideraremos el problema que obtenemos cuando uno de los límites de la integral no está fijo, ya sea totalmente libre o situado sobre una determinada función. En ambos casos llegaremos a que las funciones candidatas a ser un mínimo deberán satisfacer una o varias ecuaciones, como ya ocurría con la Condición de Euler del problema básico $(P)$. A continuación, veremos qué ocurre cuando ampliamos el conjunto admisible para admitir también funciones $y$ que sean $C^1$ a trozos. Por último, obtendremos dos nuevas condiciones necesarias para el problema básico $(P)$ a partir de lo anterior.

## 3.1. Problemas con frontera variable

Hasta ahora, en todos los problemas que hemos estudiado los extremos de la integral del funcional a minimizar estaban fijos pero podemos plantearnos el caso en el que uno de los dos límites de integración no esté dado de antemano. Así, trabajaremos con dos casos, uno en el que el extremo de integración está totalmente libre y otro en el que debe pertenecer a la imagen de una cierta función. Por último, mostraremos un ejemplo de la aplicación de estos problemas a la vida real, concretamente a la economía. En esta sección nos basaremos fundamentalmente en [5] y [6].

### 3.1.1. Extremo final libre

En primer lugar, suponemos que el extremo superior de la integral $\hat{b} \in \mathbb{R}$ es libre, con las únicas condiciones de ser mayor estricto que el extremo inferior $a$, que es fijo, y de pertenecer al dominio de definición de $f$. Tampoco conocemos el valor que han de tomar las funciones admisibles en el límite de integración desconocido. En este caso, para simplificar supondremos que la función $f$ a integrar depende de 3 variables, es de clase $C^2$ y está definida en todo $G$, donde $G$ es un abierto de $\mathbb{R}^3$. Las funciones $y$ admisibles para este problema son de clase $C^1([a, \hat{b}])$ para un cierto $\hat{b} > a$ y cumplen que $(x, y(x), y'(x)) \in G$, para todo $x \in [a, \hat{b}]$ y que $y(a) = y_a$, con $y_a \in \mathbb{R}$ fijo, como puede verse en la Figura 3.1. En resumen, el problema $\left(P_{\hat{b}}\right)$ tiene la forma siguiente, donde $a, y_a \in \mathbb{R}$ son dados:

$$\left(P_{\hat{b}}\right) : \begin{cases} \text{Hallar } y \text{ función, } \hat{b} \text{ instante final de integración que minimizan } J(y) = \int_a^{\hat{b}} f(x, y(x), y'(x))dx \\ \text{sujeto a } \hat{b} > a, y \in C^1([a, \hat{b}]) \text{ tal que } y(a) = y_a. \end{cases}$$

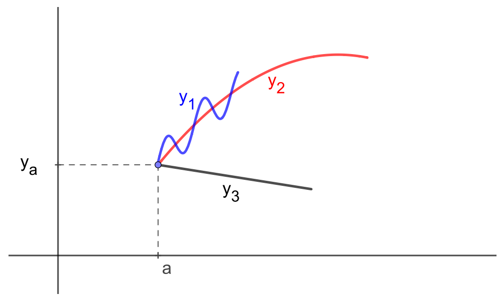


Figura 3.1: Funciones admisibles para $\left(P_{\hat{b}}\right)$.

Como el dominio de las funciones admisibles puede variar, necesitamos definir una nueva distancia con la que trabajar en este apartado. Sean $y_1 : [a, \hat{b}_0] \to \mathbb{R}$ e $y_2 : [a, \hat{b}_0 + \delta x] \to \mathbb{R}$ funciones admisibles para $\left(P_{\hat{b}}\right)$, donde supondremos que la variación en $x$, $\delta x$, que puede ser positiva, negativa o nula, es pequeña en valor absoluto (ver Figura 3.2). Si $\delta x < 0$, podemos extender $y_2$ (manteniendo la notación) en el intervalo $[\hat{b}_0 + \delta x, \hat{b}_0]$ aproximando la función mediante el desarrollo de Taylor de primer orden

$$y_2(x) = y_2(\hat{b}_0 + \delta x) + y_2'(\hat{b}_0 + \delta x)(x - (\hat{b}_0 + \delta x)),$$

y si $\delta x > 0$, extendemos $y_1$ al intervalo $[\hat{b}_0, \hat{b}_0 + \delta x]$ de la misma forma:

$$y_1(x) = y_1(\hat{b}_0) + y_1'(\hat{b}_0)(x - \hat{b}_0).$$

Por otro lado, denominaremos variación en $y$ a

$$\delta y = |y_1(\hat{b}_0) - y_2(\hat{b}_0 + \delta x)|.$$

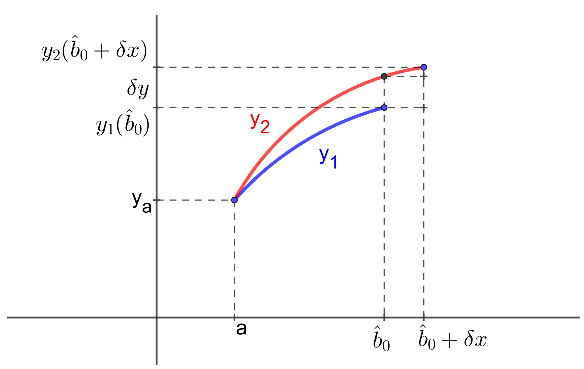


Figura 3.2: Funciones próximas según la distancia $d_{\hat{b}}$.

Teniendo en cuenta lo anterior definimos la siguiente distancia para funciones $y_1, y_2$ de clase $C^1$ (ver Figura 3.2):

$$d_{\hat{b}}(y_1, y_2) = \max_{x \in [a, \max\{\hat{b}_0 + \delta x, \hat{b}_0\}]} |y_1(x) - y_2(x)| + \max_{x \in [a, \max\{\hat{b}_0 + \delta x, \hat{b}_0\}]} |y_1'(x) - y_2'(x)| + |\delta x| + |\delta y|.$$

Por lo tanto, en esta sección consideraremos mínimos relativos únicamente con respecto a esta nueva distancia.

Vamos a enunciar la condición necesaria para este caso, pero antes notemos que si una cierta función admisible $y_0$ es un mínimo relativo del problema $\left(P_{\hat{b}}\right)$, significa que $J(y_0) \leq J(y)$ para cualquier otra función admisible $y$ tal que $d_{\hat{b}}(y, y_0) < \alpha_0$ para un cierto valor de $\alpha_0$. En particular, $J(y_0) \leq J(y_1)$ para las funciones $y_1$ que verifiquen $d_{\hat{b}}(y_1, y_0) < \alpha_0$ y que además $\delta x = \delta y = 0$, es decir, aquéllas cuyo instante óptimo de finalización y cuyo valor de la función en ese punto sean los mismos que los de $y_0$. En consecuencia, $y_0$ es también un mínimo local débil para el problema con fronteras fijas, es decir, para el problema básico $(P)$ con $b = \hat{b}_0$ e $y(b) = y_0(\hat{b}_0)$, ya que $d_1(y_1, y_0) = d_{\hat{b}}(y_1, y_0)$, luego $y_0$ ha de cumplir también la Condición de Euler en $(a, \hat{b}_0)$ y la Condición de Legendre en $[a, \hat{b}_0]$, aunque esta última sólo si $f$ es de clase $C^3$.

**Teorema 3.1.1** (Condición necesaria)**.** *Sea $f$ una función de 3 variables de clase $C^2$. Supongamos que $y_0 \in C^2([a, \hat{b}_0])$ es un mínimo relativo del problema $\left(P_{\hat{b}}\right)$ con $\hat{b}_0 \in \mathbb{R}$ instante óptimo de finalización, entonces $y_0$ verifica las ecuaciones siguientes:*

- *la Condición de Euler:* $f_y\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right) - \dfrac{d}{dx} f_{y'}\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right) = 0 \quad \forall x \in (a, \hat{b}_0)$,
- *la Condición de transversalidad 1:* $f_{y'}(\hat{b}_0, y_0(\hat{b}_0), y_0'(\hat{b}_0)) = 0$,
- *y la Condición de transversalidad 2:* $f(\hat{b}_0, y_0(\hat{b}_0), y_0'(\hat{b}_0)) - y_0'(\hat{b}_0) f_{y'}(\hat{b}_0, y_0(\hat{b}_0), y_0'(\hat{b}_0)) = 0$.

*Además, si $f$ es de clase $C^3$, también se verifica la Condición de Legendre $f_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) \geq 0$ para todo $x \in [a, \hat{b}_0]$.*

**Dem:** Como ya hemos hecho en anteriores pruebas, vamos a partir de un subconjunto de funciones admisibles al que haremos depender de un cierto parámetro para transformar el problema de cálculo de variaciones en uno de optimización de una función de una sola variable.

Sean $y_0$ un mínimo relativo del problema $\left(P_{\hat{b}}\right)$ que minimiza $J$ en el intervalo $[a, \hat{b}_0]$ e $y : [a, \hat{b}_0 + \delta x] \to \mathbb{R}$ una función admisible tal que $d_{\hat{b}}(y, y_0) < \alpha_0$ para $\alpha_0$ suficientemente pequeño.

Fijados la función $y$ y $\delta x$, definimos $Y : [a, \max\{\hat{b}_0 + \delta x, \hat{b}_0\}] \to \mathbb{R}$ dada por $Y(x) = y(x) - y_0(x)$. Notemos que es de clase $C^1$ y que se anula en $x = a$. Consideramos el subconjunto de las funciones admisibles de $\left(P_{\hat{b}}\right)$ compuesto por las funciones (admisibles) definidas en $[a, \max\{\hat{b}_0 + \delta x, \hat{b}_0\}]$ de la forma $y_\alpha(x) = y_0(x) + \alpha Y(x)$, con $|\alpha| < \alpha_0 < 1$.

Como las funciones $y_\alpha$ son admisibles, consideramos el problema de minimizar $J$ dentro de esta familia de funciones admisibles y con límite superior de la integral $\hat{b}_0 + \alpha\delta x$, para poder tener que este problema sólo depende de la variable $\alpha$:

$$\Phi(\alpha) = J(y_\alpha) = \int_a^{\hat{b}_0 + \alpha\delta x} f(x, y_0(x) + \alpha Y(x), y_0'(x) + \alpha Y'(x)) dx.$$

Aplicando que $y_0$ es un mínimo relativo de $\left(P_{\hat{b}}\right)$ con $\hat{b}_0$ extremo final de integración óptimo, tenemos que para $\alpha_0$ suficientemente pequeño, $\Phi$ posee un mínimo local en $\alpha = 0$. Por ello, $\Phi'(0) = 0$. Usando la fórmula de Leibniz, ya que todas las funciones que intervienen son de clase $C^1$, hallamos la derivada $\Phi'(\alpha)$ y sustituimos para $\alpha = 0$:

$$\Phi'(0) = f^0(\hat{b}_0)\delta x + \int_a^{\hat{b}_0} \left(f_y^0(x) Y(x) + f_{y'}^0(x) Y'(x)\right) dx = 0, \tag{3.1}$$

donde $f^0(\hat{b}_0) = f(\hat{b}_0, y_0(\hat{b}_0), y_0'(\hat{b}_0))$, $f_y^0(x) = f_y(x, y_0(x), y_0'(x))$ y $f_{y'}^0(x) = f_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))$.

A continuación, integramos por partes el segundo sumando de la integral llegando a

$$\int_a^{\hat{b}_0} f^0_{y'}(x)Y'(x)dx = \left[f^0_{y'}(x)Y(x)\right]_{x=a}^{x=\hat{b}_0} - \int_a^{\hat{b}_0} Y(x)\frac{d}{dx}\left(f^0_{y'}(x)\right)dx.$$

Puesto que $Y(a) = 0$, volviendo a la expresión (3.1),

$$\Phi'(0) = f^0(\hat{b}_0)\delta x + f^0_{y'}(\hat{b}_0)Y(\hat{b}_0) + \int_a^{\hat{b}_0} Y(x)\left[f^0_y(x) - \frac{d}{dx}f^0_{y'}(x)\right]dx = 0.$$

Además, sabemos que $y_0$ es un extremal, luego verifica la ecuación de Euler para $x \in (a, \hat{b}_0)$, por lo que $f^0_y(x) - \frac{d}{dx}f^0_{y'}(x) = 0$ en ese intervalo. En consecuencia,

$$f^0(\hat{b}_0)\delta x + f^0_{y'}(\hat{b}_0)Y(\hat{b}_0) = 0. \tag{3.2}$$

Consideramos $\delta y = y(\hat{b}_0+\delta x) - y_0(\hat{b}_0)$, (ver Figura 3.2). Como $d_{\hat{b}}(y, y_0)$ es pequeño, podemos aproximar $y(\hat{b}_0 + \delta x) \simeq y(\hat{b}_0) + y_0'(\hat{b}_0)\delta x$, para así llegar a

$$\delta y \simeq y(\hat{b}_0) - y_0(\hat{b}_0) + y_0'(\hat{b}_0)\delta x = Y(\hat{b}_0) + y_0'(\hat{b}_0)\delta x.$$

Despejando,

$$Y(\hat{b}_0) \simeq \delta y - y_0'(\hat{b}_0)\delta x.$$

Finalmente sustituyendo en (3.2) obtenemos

$$f^0_{y'}(\hat{b}_0)\delta y + \left[f^0(\hat{b}_0) - y_0'(\hat{b}_0)f^0_{y'}(\hat{b}_0)\right]\delta x = 0. \tag{3.3}$$

En particular, cuando tomamos una función que cumpla $\delta x \neq 0$ y $\delta y = 0$,

$$f^0(\hat{b}_0) - y_0'(\hat{b}_0)f^0_{y'}(\hat{b}_0) = 0,$$

y cuando escogemos otra con $\delta x = 0$ y $\delta y \neq 0$,

$$f^0_{y'}(\hat{b}_0) = 0.$$

Así hemos conseguido dos ecuaciones independientes, como pretendíamos. ■

A partir de la demostración podemos deducir que este teorema puede aplicarse cuando no se conoce el extremo inferior de la integral $\hat{a}$ obteniendo las mismas ecuaciones evaluadas en el punto $x = \hat{a}$. Si los dos extremos de integración fuesen desconocidos llegaríamos a tener cuatro ecuaciones, además de la de Euler. Por otro lado, podemos aplicar el Teorema 3.1.1 a un ejemplo.

**Ejemplo 3.1.2.** *Encontrar las funciones y los instantes finales que verifiquen la condición necesaria para minimizar el funcional* $J(y) = \int_0^{\hat{b}}\left[y(x)\cos(x) + (y'(x))^2\right]dx$ *con la condición* $y(0) = 0$.

Planteamos en primer lugar la Condición de Euler $2y'' = \cos(x)$, de donde podemos deducir que $y(x) = -\cos(x)/2 + Cx + D$ con $C, D \in \mathbb{R}$. A continuación, aplicando que $y(0) = 0$, vemos que $D = 1/2$. Además, $f_{y'y'}(x) = 2 \geq 0$, por lo que la función $y$ verifica la Condición de Legendre.

Ahora aplicamos las dos condiciones restantes del Teorema 3.1.1 para hallar $\hat{b}$ y $C$. De la primera ecuación obtenemos que $y'(\hat{b}) = \sin(\hat{b})/2 + C = 0$. A partir de esto, la segunda ecuación queda muy simplificada y se reduce a calcular

$$y(\hat{b})\cos(\hat{b}) = \frac{1}{2}(-\cos(\hat{b}) - \hat{b}\sin(\hat{b}) + 1)\cos(\hat{b}) = 0.$$

Está claro que si $\cos(\hat{b}) = 0$ o $\cos(\hat{b}) = 1$ la ecuación se anula, luego $\hat{b} = \pi/2 + k\pi$ y $\hat{b} = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ son raíces de esta ecuación, aunque existen otras soluciones. Deducimos entonces que el funcional $J$ puede alcanzar un mínimo relativo en las funciones

$$y(x) = -\cos(x)/2 - (\sin(\hat{b})/2)x + 1/2,$$

donde $\hat{b} = 2(k+1)\pi$ o $\hat{b} = \pi/2 + k\pi$ con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ya que $\hat{b}$ tiene que ser mayor que 0. En este caso, hemos obtenido infinitos candidatos a extremo local.

Por último, si calculamos $\int_0^{\hat{b}} \left[ y(x)\cos(x) + (y'(x))^2 \right] dx$ en los puntos de la forma $\hat{b} = 2(k+1)\pi$, obtenemos que su valor es $-(k+1)\pi/4$, por lo que el problema con el que estamos trabajando no está acotado inferiormente. Por lo tanto, ninguno de los extremales que hemos calculado puede ser un mínimo global de este problema.

### 3.1.2. Extremo final condicionado

Un caso similar al del problema $\left(P_{\hat{b}}\right)$ ocurre cuando el extremo final de integración $\hat{b}$ $(\hat{b} > a)$ es libre pero las funciones admisibles $y$ han de cumplir que $y(\hat{b}) = \phi(\hat{b})$, es decir, que el extremo final de la función $y$ debe estar sobre la imagen de la función $\phi$, que será al menos de clase $C^1([a, +\infty))$. Por lo tanto, las funciones admisibles $y$ son de clase $C^1([a, \hat{b}])$ para un cierto $\hat{b} > a$ y cumplen que $(x, y(x), y'(x)) \in G$, para todo $x \in [a, \hat{b}]$ y que $y(a) = y_a$, con $y_a \in \mathbb{R}$ fijo, como puede verse en la Figura 3.3. La función $f$ cumple las mismas condiciones que en el caso del extremo final libre. En consecuencia, obtenemos un nuevo problema al que denotaremos $(P_\phi)$ que, dados $a, y_a \in \mathbb{R}$ y $\phi \in C^1([a, +\infty))$, tiene la forma siguiente

$$(P_\phi) : \begin{cases} \text{Hallar } y \text{ función, } \hat{b} \text{ instante final de integración que minimizan } J(y) = \int_a^{\hat{b}} f(x, y(x), y'(x))dx \\ \text{sujeto a } \hat{b} > a,\ y \in C^1([a, \hat{b}]) \text{ tal que } y(a) = y_a,\ y(\hat{b}) = \phi(\hat{b}). \end{cases}$$

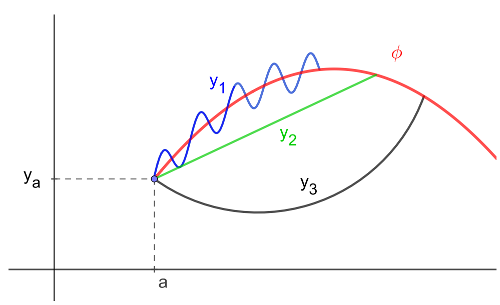


Figura 3.3: Funciones admisibles para $(P_\phi)$ (en rojo la función $\phi$).

Igual que ya explicamos en el caso del extremo totalmente libre, cualquier función admisible que sea un mínimo del funcional con extremo superior de la integral $\hat{b}$, ha de verificar la ecuación de Euler en el intervalo $(a, \hat{b})$ y, si la función $f$ es de clase $C^3$, también la Condición de Legendre en $[a, \hat{b}]$. La condición necesaria en este problema sólo aporta una nueva ecuación (además de la Euler), ya que recordemos que $\hat{b}$ e $y(\hat{b})$ están relacionados mediante la función $\phi$.

**Teorema 3.1.3** (Condición necesaria). *Sean $\phi \in C^1([a, +\infty))$ y $f$ una función de 3 variables de clase $C^2$. Supongamos que $y_0 \in C^2([a, \hat{b}_0])$ es un mínimo local del problema $(P_\phi)$ (con respecto a la distancia $d_{\hat{b}}$) cumpliendo $y_0(\hat{b}_0) = \phi(\hat{b}_0)$, con $\hat{b}_0$ instante óptimo de finalización, entonces $y_0$ verifica las condiciones siguientes:*

- *la Condición de Euler:* $f_y\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right) - \dfrac{d}{dx} f_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0 \quad \forall x \in (a, \hat{b}_0)$,
- *la Condición de transversalidad:* $f(\hat{b}_0, y_0(\hat{b}_0), y_0'(\hat{b}_0)) + \left(\phi'(\hat{b}_0) - y_0'(\hat{b}_0)\right) f_{y'}(\hat{b}_0, y_0(\hat{b}_0), y_0'(\hat{b}_0)) = 0.$

*Además, si $f$ es de clase $C^3$, también se verifica la Condición de Legendre $f_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) \geq 0$ para todo $x \in [a, \hat{b}_0]$.*

**Dem:** La demostración es idéntica a la hecha para el Teorema 3.1.1, simplemente hay que añadir un detalle. Una vez llegado a la ecuación (3.3), usamos que $y(\hat{b}_0) = \phi(\hat{b}_0)$. De este modo, aplicando Taylor a la función $\phi$ en torno al punto $\hat{b}_0$ llegamos a

$$\delta y = y(\hat{b}_0 + \delta x) - y_0(\hat{b}_0) = \phi(\hat{b}_0 + \delta x) - \phi(\hat{b}_0) \simeq \phi'(\hat{b}_0)\delta x.$$

Sustituyendo y reorganizando los términos tenemos

$$\left[f^0(\hat{b}_0) + \left(\phi'(\hat{b}_0) - y_0'(\hat{b}_0)\right) f^0_{y'}(\hat{b}_0)\right] \delta x = 0,$$

donde $f^0(\hat{b}_0) = f(\hat{b}_0, y_0(\hat{b}_0), y_0'(\hat{b}_0))$ y lo mismo para $f^0_{y'}(\hat{b}_0)$. Como $\delta x$ no tiene por qué ser cero, obtenemos la condición de transversalidad

$$f^0(\hat{b}_0) + \left(\phi'(\hat{b}_0) - y_0'(\hat{b}_0)\right) f^0_{y'}(\hat{b}_0) = 0.$$

■

Observemos que si $\phi$ es una función constante, entonces, aunque no sabemos cuál es el extremo $\hat{b}$ óptimo de integración, sí que conocemos cuánto ha de valer la función que realiza un mínimo del funcional en ese punto. A esta condición de frontera se la llama condición de estado final dado (ver Ejemplo 3.1.6).

Por otra parte, vamos a proponer un ejemplo para aplicar el teorema.

**Ejemplo 3.1.4.** *Encontrar las funciones y los instantes finales $\hat{b} > 0$ que pueden minimizar el funcional $J(y) = \int_0^{\hat{b}} \left(4y(x) + (y'(x))^2\right) dx$ con las condiciones $y(0) = 0$ e $y(\hat{b}) = \phi(\hat{b}) = 3\hat{b}^2 - \hat{b}$.*

Lo primero es encontrar cuáles son los extremales de este problema. La ecuación de Euler es $4 - 2y'' = 0$, de lo que se deduce que $y(x) = x^2 + Cx + D$. Como $y(0) = 0$, $D$ tiene que ser nulo, luego $y(x) = x^2 + Cx$ con $C \in \mathbb{R}$. Además, $f_{y'y'} = 2 \geq 0$, por lo que se verifica también la Condición de Legendre.

Como tiene que ser $y(\hat{b}) = \phi(\hat{b})$, se cumple que $3\hat{b}^2 - \hat{b} = \hat{b}^2 + C\hat{b}$, y obtenemos que $C = 2\hat{b} - 1$, lo que nos permite sustituir en la Condición de transversalidad

$$4y(\hat{b}) + (y'(\hat{b}))^2 + (\phi'(\hat{b}) - y'(\hat{b}))2y'(\hat{b}) = 0.$$

Usando las expresiones explícitas de $y$, $y'$ y $\phi'$, unidas al valor de $C$, obtenemos una ecuación de segundo grado en $\hat{b}$, $44\hat{b}^2 - 16\hat{b} + 1 = 0$, cuyas raíces son $\hat{b} = 2/11 \pm \sqrt{5}/22$. Así, hay un valor distinto de $C$ para cada $\hat{b}$, que es $C = -7/11 \pm \sqrt{5}/11$.

Por consiguiente, empleando la condición necesaria concluimos que $J$ sólo puede tener un mínimo en la función $y_1(x) = x^2 + (-7/11 + \sqrt{5}/11)x$, donde el extremo de integración sería $\hat{b} = 2/11 + \sqrt{5}/22$, o en la función $y_2(x) = x^2 - (7/11 + \sqrt{5}/11)x$, con $\hat{b} = 2/11 - \sqrt{5}/22$.

### 3.1.3. Un ejemplo práctico

Vamos a mostrar una aplicación práctica al ámbito de la economía del problema básico y de los problemas con frontera variable, concretamente se tratará de un modelo de gestión de stocks de una empresa. Mostraremos dos ejemplos, en el primero se conocerá el instante final y en el segundo no. En este caso, la variable independiente será $t$ porque simboliza un instante de tiempo.

**Ejemplo 3.1.5.** Una empresa dispone de un stock $y_{t_0} > 0$ de un cierto producto en el instante temporal $t_0$. Supongamos que el almacenamiento de cada unidad de stock implica un coste instantáneo de $c$ unidades monetarias y que por la venta de $q$ unidades del producto se obtiene un beneficio, que no incluye los costes de almacenamiento de esas $q$ unidades, dado por una cierta función cóncava $\psi(q(t)) \in C^2([t_0, t_1])$. La función $y(t)$ denota el número de unidades del producto que tenemos en el almacén en el instante $t$. Las funciones $q$ e $y$ están relacionadas, ya que la cantidad de producto que hay disponible en el almacén depende de cuánto stock se haya vendido.

La empresa pretende vender todo el stock en un determinado periodo de tiempo $[t_0, t_1]$ para obtener el máximo beneficio posible. Con todo lo anterior, se obtiene el siguiente problema:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } y, q \text{ funciones tal que maximicen } J(y,q) = \int_{t_0}^{t_1} (\psi(q(t)) - cy(t))\, dt, \\ \text{sujeto a } y(t_0) = y_{t_0},\ y(t_1) = 0,\ y'(t) = -q(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \end{cases}$$

En principio, podría parecer un problema dependiente de dos funciones incógnitas, pero usando la restricción $y'(t) = -q(t)$, pasa a depender únicamente de $y$. Por lo tanto, se trata de un problema básico:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } y \text{ función que maximice } J(y) = \int_{t_0}^{t_1} (\psi(-y'(t)) - cy(t))\, dt, \\ \text{sujeto a } y(t_0) = y_{t_0},\ y(t_1) = 0. \end{cases}$$

Planteamos la ecuación de Euler del Teorema 1.2.1:

$$c = \frac{d}{dt}\psi'(-y'(t)) = -\psi''(-y'(t))y''(t) \quad \forall t \in (t_0, t_1).$$

A partir de esta ecuación y de las condiciones inicial $y(t_0) = y_{t_0}$ y final $y(t_1) = 0$ puede encontrarse qué funciones $y$ maximizan $J$. Si $\psi$ es de clase $C^3$, la Condición de Legendre para máximos de la Proposición 1.4.2 se cumple porque $\psi_{y'y'} = \psi'' \leq 0$ para todo $t \in [t_0, t_1]$, ya que $\psi$ es cóncava por hipótesis. Por último, toda función que verifique la ecuación de Euler en $(t_0, t_1)$ será un máximo global del problema, como se sigue de la Proposición 1.4.5.

**Ejemplo 3.1.6.** Ahora supongamos que la empresa pretende hacer previsiones a largo plazo para maximizar el beneficio, es decir, que no se conoce el instante final $\hat{t_1}$, aunque sí sabemos que $y(\hat{t_1}) = 0$, ya que la empresa quiere vender todo el stock que tiene disponible. El resto del problema es análogo al anterior:

$$\begin{cases} \text{Hallar } y \text{ función, } \hat{t_1} \text{ instante final de integración que maximicen } J(y) = \int_{t_0}^{\hat{t_1}} (\psi(-y'(t)) - cy(t))\, dt, \\ \text{sujeto a } y(t_0) = y_{t_0},\ y(\hat{t_1}) = 0. \end{cases}$$

Se trata de un problema de extremo final condicionado con $\phi(\hat{t_1}) = y(\hat{t_1}) = 0$, luego podemos aplicar el Teorema 3.1.3 a la función $-\psi(-y'(t)) + cy(t)$. La condición necesaria aporta entonces las ecuaciones de Euler y de transversalidad, donde hay que hallar, usando también las condiciones de frontera $y(t_0) = y_{t_0}$ e $\phi(\hat{t_1}) = y(\hat{t_1}) = 0$, la función $y$ y el valor de $\hat{t_1}$:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\psi'(-y'(t)) = c \quad \forall t \in (t_0, \hat{t_1}), \\ \psi(-y'(\hat{t_1})) - cy(\hat{t_1}) + y'(\hat{t_1})\psi'(-y'(\hat{t_1})) = 0. \end{cases}$$

Por último, si $\psi \in C^3([t_0, \hat{t_1}])$, la Condición de Legendre para máximos dada en la Proposición 1.4.2 se verifica porque $\psi_{y'y'} = \psi'' \leq 0$ para todo $t \in [t_0, \hat{t_1}]$, debido a que $\psi$ es una función cóncava.

Estos dos modelos previamente estudiados son una simplificación del problema real y en ellos no se ha tenido en cuenta que como la función $y$ representa el número de unidades del producto que tenemos en el almacén, ha de ser no negativa, por lo que debería haberse considerado la restricción $y(t) \geq 0$ para todo $t \in [t_0, \hat{t_1}]$.

## 3.2. Funciones admisibles de clase $C^1$ a trozos

Hasta el momento hemos estado trabajando sólo con funciones admisibles que eran al menos de clase $C^1$ en todo el intervalo sobre el que integrábamos. Sin embargo, podemos ampliar el conjunto admisible a las funciones que sean de clase $C^1$ en todo el intervalo salvo en un número finito de puntos, lo que permite considerar, entre otros, los problemas sobre la reflexión y la refracción de extremales (ver, por ejemplo [6]).

**Definición 3.2.1** (Función $C^1$ a trozos)**.** *Una función continua $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ es de clase $C^1$ a trozos si existe un número finito de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tales que $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$ y la función $y$ es de clase $C^1$ en cada uno de los subintervalos $[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n], [x_n, b]$, donde la derivada en cada uno de esos puntos $x_i$ será la correspondiente derivada lateral.*

Por consiguiente, trabajaremos con el espacio $C_t^1([a, b])$ de las funciones que son $C^1$ a trozos en $[a, b]$. Obtenemos así una nueva extensión del problema básico $(P)$ que ya consideramos con anterioridad. Nos basaremos principalmente en [4]. El planteamiento del problema es similar salvo por el cambio en el conjunto admisible. Por consiguiente, $a, b \in \mathbb{R}$ son los extremos fijos de la integral del funcional $J$ y $f$ es una función de 3 variables de clase $C^2$ que está definida en $G$, siendo $G$ un abierto de $\mathbb{R}^3$. Las funciones admisibles $y$ son de clase $C^1$ a trozos en $[a, b]$, cumplen que $(x, y(x), y'(x)) \in G$ para todo $x \in [a, b]$ y verifican que $y(a) = y_a$ e $y(b) = y_b$, donde $y_a, y_b \in \mathbb{R}$ son fijos (ver Figura 3.4). Así, tenemos el siguiente problema $(P_t)$, fijados $a, b, y_a, y_b \in \mathbb{R}$:

$$(P_t) : \begin{cases} \text{Encontrar } y \text{ función que minimiza } \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx \\ \text{sujeto a } y \in C_t^1([a, b]) \text{ tal que } y(a) = y_a, \ y(b) = y_b. \end{cases}$$

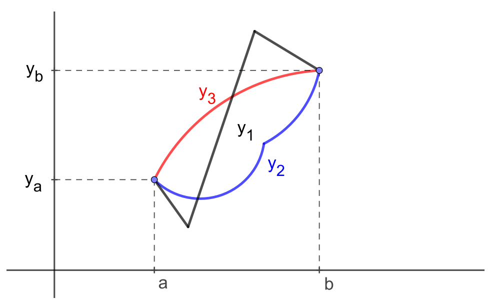


Figura 3.4: Funciones admisibles para $(P_t)$.

Vamos a deducir una condición necesaria para este problema pero antes necesitamos dar la definición de función continua a trozos porque la usaremos en la demostración de un lema previo, que emplearemos a su vez en la prueba de la condición.

**Definición 3.2.2** (Función continua a trozos)**.** *Una función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua a trozos si existe un número finito de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$ tales que y es continua en cada uno de los subintervalos abiertos $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, b)$ y existen los límites siguientes, donde $i = 1, 2, \ldots, n$:*

$$\lim_{x \to a^+} F(x), \quad \lim_{x \to x_i^-} F(x), \quad \lim_{x \to x_i^+} F(x), \quad \lim_{x \to b^-} F(x).$$

A continuación enunciamos el lema que usaremos en la demostración de la condición.

**Lema 3.2.3** (Lema de du Bois-Reymond)**.** *Sea $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua a trozos. Supongamos que para cada función $Y : [a,b] \to \mathbb{R}$ de clase $C^1$ a trozos que cumpla $Y(a) = Y(b) = 0$, se verifica que*

$$\int_a^b F(x)Y'(x)dx = 0,$$

*entonces $F$ es constante en $[a,b]$.*

**Dem:** Sea $C = \frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)dx$, con lo que se tiene que $\int_a^b (C - F(x))dx = 0$. Consideremos la función $Y_0$ definida en $[a,b]$ dada por la expresión $Y_0(x) = \int_a^x (C - F(t))dt$. Esta función cumple que $Y_0(a) = Y_0(b) = 0$. Además, aplicando la fórmula de Leibniz a cada subintervalo donde $F$ es continua, tenemos que $Y_0$ es de clase $C^1$ a trozos y su derivada es $Y_0'(x) = C - F(x)$. Por lo tanto, $Y_0$ cumple las hipótesis del lema, por lo que llegamos a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b F(x)Y_0'(x)dx = \int_a^b F(x)(C - F(x))dx = \int_a^b \left[F(x)(C - F(x)) - C(C - F(x))\right] dx \\ &= -\int_a^b (C - F(x))^2 dx, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\int_a^b (C - F(x))dx = 0$. De lo anterior deducimos que en los puntos donde $F$ es continua, $F(x) = C$, es decir, $F$ es constante.

En los puntos $x_i$ donde la función $F$ no es continua, como $F$ es continua a trozos, existen los límites $\lim_{x\to x_i^-} F(x) = C$ y $\lim_{x\to x_i^+} F(x) = C$ y coinciden, por lo que ha de ser $F(x_i) = C$, con lo cual $F$ es constante en $[a,b]$. ∎

Como las funciones admisibles son de clase $C^1$ a trozos, consideraremos sólo la distancia $d_0$ entre funciones admisibles. Por ello, la condición necesaria que vamos a mostrar, llamada la Primera Condición de Erdmann, sólo será válida para mínimos relativos fuertes de $(P_t)$. También existe la Segunda Condición de Erdmann, aunque no la incluiremos aquí por ser bastante más laboriosa la demostración.

**Teorema 3.2.4** (Primera Condición de Erdmann)**.** *Sea $f$ una función de 3 variables de clase $C^2$. Si $y_0$ es un mínimo relativo fuerte del problema $(P_t)$ de clase $C^1$ a trozos en $[a,b]$, en cada punto $x_i \in (a,b)$ donde $y_0'$ no es continua se verifica que*

$$\lim_{x\to x_i^+} f_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = \lim_{x\to x_i^-} f_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)).$$

**Dem:** El razonamiento empleado será similar al que hemos usado en otras pruebas anteriores.

Sea $y_0$ un mínimo local fuerte de $(P_t)$. Vamos a considerar el conjunto de las funciones admisibles que son de la forma $y_\alpha(x) = y_0(x) + \alpha Y(x)$, con $|\alpha| < \alpha_0$, siendo $\alpha_0$ un número estrictamente positivo lo suficientemente pequeño, e $Y(x)$ una función de clase $C^1$ a trozos fijada con $Y(a) = Y(b) = 0$. Las funciones $y_\alpha$ son $C^1$ a trozos. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ los puntos de $(a,b)$ donde no son derivables. Denotamos por $x_0 = a$ y $x_{n+1} = b$. Minimizamos $J$ dentro de este conjunto de funciones y tenemos un problema de optimización dependiente solamente de $\alpha$:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha) = J(y_\alpha) &= \int_a^b f\left(x, y_0(x) + \alpha Y(x), y_0'(x) + \alpha Y'(x)\right) dx \\ &= \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\left(x, y_0(x) + \alpha Y(x), y_0'(x) + \alpha Y'(x)\right) dx. \end{aligned}$$

Usando que $y_0$ es un mínimo local de $(P_t)$, cuando $|\alpha|$ es suficientemente pequeño, $\Phi$ posee un mínimo relativo en $\alpha = 0$, por lo que $\Phi'(0) = 0$. Derivamos con respecto a $\alpha$ empleando la fórmula de Leibniz en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\Phi'(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ f_y \left(x, y_0(x) + \alpha Y(x), y_0'(x) + \alpha Y'(x)\right) Y(x) \right.$$
$$\left. + \, f_{y'} \left(x, y_0(x) + \alpha Y(x), y_0'(x) + \alpha Y'(x)\right) Y'(x) \right] dx.$$

En $\alpha = 0$,

$$\Phi'(0) = \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ f_y \left(x, y_0(x), y_0'(x)\right) Y(x) + f_{y'} \left(x, y_0(x), y_0'(x)\right) Y'(x) \right] dx. \tag{3.4}$$

Integramos por partes el primer miembro de la integral, obteniendo, donde $f_y^0(x) = f_y\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right)$,

$$\int_a^b f_y^0(x) Y(x) dx = \sum_{i=0}^{n} \left( \left[ Y(x) \int_a^x f_y^0(t) dt \right]_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( Y'(x) \int_a^x f_y^0(t) dt \right) dx \right)$$
$$= - \int_a^b \left( Y'(x) \int_a^x f_y^0(t) dt \right) dx,$$

puesto que $Y(a) = Y(b) = 0$. Sustituyendo en la expresión (3.4), donde $f_{y'}^0(x) = f_{y'}\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right)$, llegamos a

$$0 = \int_a^b \left[ f_{y'}^0(x) - \int_a^x f_y^0(t) dt \right] Y'(x) dx.$$

Como esta igualdad se cumple para todas las funciones $Y$ que son $C^1$ a trozos y se anulan en $a$ y en $b$ y la función que integramos es continua a trozos, podemos aplicar el Lema de du Boys-Reymond para deducir que la función $g(x) = f_{y'}^0(x) - \int_a^x f_y^0(t)dt$ es constante en $[a, b]$, es decir,

$$f_{y'}^0(x) - \int_a^x f_y^0(t) dt = C, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Como $y_0$ es $C^1$ a trozos, puede haber una cantidad finita de puntos donde la derivada no es continua. Sea $x_i \in [a, b]$ uno de esos puntos, por lo que $\lim_{x \to x_i^+} y_0'(x) \neq \lim_{x \to x_i^-} y_0'(x)$. Dado un intervalo $[c, d] \subset [a, b]$ con $x_i \in [c, d]$ el único punto donde la derivada $y_0'$ no es continua en el intervalo, tenemos la igualdad siguiente:

$$0 = g(d) - g(c) = f_{y'}^0(d) - f_{y'}^0(c) - \int_c^d f_y^0(t) dt.$$

Si hacemos tender $c$ y $d$ a $x_i$, en el límite la integral $\int_c^d f_y^0(t)dt$ se anula porque la función a integrar está acotada (es continua en un compacto), con lo que obtenemos la condición que buscábamos:

$$\lim_{x \to x_i^+} f_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = \lim_{x \to x_i^-} f_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x)).$$

■

La expresión (3.5) es denominada ecuación de Euler en forma integral. Así, si $y_0$ es de clase $C^1$ en un punto $x_0 \in (a, b)$, la función $f_{y'}^0(x)$ es diferenciable en $x = x_0$, por lo que $\int_a^x f_y^0(t)dt = f_{y'}^0(x) - C$ también lo será en ese punto. Por tanto, podemos derivar la ecuación (3.5) con respecto de $x$ y obtenemos

$$f_y^0(x_0) - \frac{d}{dx} f_{y'}^0(x_0) = 0,$$

que es la ecuación de Euler del problema básico $(P)$ del Teorema 1.2.1, pero que ahora hemos obtenido con unas hipótesis menos exigentes, ya que en aquel teorema era necesario que $y_0$ fuera de clase $C^2$. De hecho, tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 3.2.5.** *Sea $f$ una función de clase $C^2$. Sea $y_0$ una función de clase $C^1([a,b])$ que satisface la Condición de Euler en $(a,b)$. Si $f^0_{y'y'}(x) \neq 0$, para todo $x \in (c,d) \subseteq (a,b)$, entonces $y_0$ es de clase $C^2(c,d)$.*

**Dem:** Como $y_0$ satisface la Condición de Euler para todo $x \in (c,d)$, $\frac{d}{dx} f^0_{y'}(x) = f^0_y(x)$, es decir, la derivada existe en todo el intervalo. Por otro lado, usando la regla de la cadena, $\frac{d}{dx} f^0_{y'}(x) = f^0_{y'x}(x) + f^0_{y'y}(x) y_0'(x) + f^0_{y'y'}(x) y_0''(x)$. Como $f^0_{y'y'}(x) \neq 0$ para $x \in (c,d)$, podemos despejar y expresar $y_0''$ como composición de funciones continuas

$$y_0''(x) = \left( f^0_y(x) - f^0_{y'x}(x) - f^0_{y'y}(x) y_0'(x) \right) / f^0_{y'y'}(x),$$

por lo que $y_0$ es de clase $C^2(c,d)$. ∎

A continuación mostramos un ejemplo de aplicación de la condición necesaria que proviene de resolver un ejercicio propuesto en [13].

**Ejemplo 3.2.6.** *Encontrar una función de clase $C^1$ a trozos que minimice el funcional definido por $J(y) = \int_0^1 (y'(x))^2 (1 + y'(x))^2 dx$ con las condiciones $y(0) = 0$, $y(1) = m$ con $m \in (-1, 0)$.*

Como la función a integrar es no negativa, es claro que si encontramos una función $y_0$ que anule el valor del funcional, $y_0$ será un mínimo global de $J$. Por lo tanto, hay que encontrar una función admisible cuya derivada sea $-1$ ó $0$ en casi todos los puntos del intervalo $[0,1]$. Definimos la siguiente función:

$$y_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, m+1), \\ -x + m + 1 & \text{si } x \in [m+1, 1]. \end{cases}$$

La función $y_0$ cumple las condiciones $y_0(0) = 0$, $y_0(1) = m$. Además, $y_0'(x) = 0$ si $x \in (0, m+1)$ e $y_0'(x) = -1$ si $x \in (m+1, 1)$, luego es de clase $C^1$ a trozos. Veamos que satisface la Primera Condición de Erdmann en ese punto:

$$\lim_{x \to m+1^-} 2y_0'(x)(1 + y_0'(x))^2 + 2(y_0'(x))^2(1 + y_0'(x)) = 0,$$

$$\lim_{x \to m+1^+} 2y_0'(x)(1 + y_0'(x))^2 + 2(y_0'(x))^2(1 + y_0'(x)) = 0,$$

por lo que ambos límites coinciden y se verifica la condición.

Ahora comprobemos la Condición de Euler en los intervalos $(0, m+1)$ y $(m+1, 1)$. En $(0, m+1)$ es inmediato que se cumple puesto que $f^0_y(x) = f^0_{y'}(x) = 0$, mientras que en $(m+1, 1)$ tenemos que $f^0_y(x) = 0$ y $f^0_{y'}(x) = 2(y_0'(x))^2(1 + y_0'(x)) + 2y_0'(x)(1 + y_0'(x))^2 = 0$, puesto que $y_0'(x) = -1$ si $x \in (m+1, 1)$, por lo que también se verifica.

### 3.2.1. Condición de Jacobi

Usando lo estudiado en el apartado anterior, vamos a ver que podemos obtener una nueva condición necesaria para el problema básico $(P)$, aunque sólo será válida para mínimos relativos fuertes, es decir, si una función $y$ no la satisface podremos garantizar que no es un mínimo local fuerte, pero no podremos asegurar que tampoco es un mínimo relativo débil. Seguiremos la idea dada en [4].

Al igual que en la prueba de la Condición de Legendre (Teorema 1.2.4), vamos a usar la condición necesaria de segundo orden para que una función real $\Phi$ de una variable tenga un mínimo en un punto $x_0$, consistente en que $\Phi''(x_0) \geq 0$. Supongamos entonces que $y_0$ es un mínimo relativo fuerte del problema $(P_t)$ y procedamos como en la demostración de la Primera Condición de Erdmann. Supondremos que las funciones $y_0$ y $f$ son de clase $C^3$ y $C^4$ respectivamente.

Consideramos el conjunto de las funciones admisibles que son de la forma $y_\alpha(x) = y_0(x) + \alpha Y(x)$, con $|\alpha| < \alpha_0$, siendo $\alpha_0$ un número estrictamente positivo lo suficientemente pequeño, e $Y(x)$ una función de clase $C^1$ a trozos fijada con $Y(a) = Y(b) = 0$. Las funciones $y_\alpha$ son $C^1$ a trozos. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ los puntos de $(a, b)$ donde no son derivables con continuidad. Denotamos por $x_0 = a$ y $x_{n+1} = b$. Minimizamos $J$ dentro de este conjunto de funciones admisibles y tenemos un problema de optimización dependiente solamente de $\alpha$:

$$\Phi(\alpha) = J(y_\alpha) = \int_a^b f(x, y_0(x) + \alpha Y(x), y_0'(x) + \alpha Y'(x))\, dx.$$

Usando que $y_0$ es un mínimo local fuerte de $(P_t)$, cuando $|\alpha|$ es suficientemente pequeño, $\Phi$ posee un mínimo relativo en $\alpha = 0$, por lo que $\Phi''(0) \geq 0$. Derivamos dos veces con respecto a $\alpha$ empleando la fórmula de Leibniz en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\begin{aligned}\Phi'(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} & \left[f_y(x, y_0(x) + \alpha Y(x), y_0'(x) + \alpha Y'(x))\, Y(x)\right. \\ & \left. + f_{y'}(x, y_0(x) + \alpha Y(x), y_0'(x) + \alpha Y'(x))\, Y'(x)\right] dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi''(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} & \left[f_{yy}(x, y_0(x) + \alpha Y(x), y_0'(x) + \alpha Y'(x))\, (Y(x))^2\right. \\ & + 2 f_{yy'}(x, y_0(x) + \alpha Y(x), y_0'(x) + \alpha Y'(x))\, Y(x) Y'(x) \\ & \left. + f_{y'y'}(x, y_0(x) + \alpha Y(x), y_0'(x) + \alpha Y'(x))\, (Y'(x))^2\right] dx.\end{aligned}$$

Sustituyendo en $\alpha = 0$ y escribiendo la integral ya sin el sumatorio,

$$\Phi''(0) = \int_a^b \left[f^0_{yy}(x)(Y(x))^2 + 2 f^0_{yy'}(x) Y(x) Y'(x) + f^0_{y'y'}(x)(Y'(x))^2\right] dx \equiv \int_a^b F(x, Y(x), Y'(x)) \geq 0,$$

donde $f^0_{yy}(x) = f^0_{yy}(x, y_0(x), y_0'(x))$ y lo mismo ocurre con $f^0_{yy'}(x)$ y $f^0_{y'y'}(x)$. Ahora podemos considerar la expresión de $\Phi''(0)$ como un nuevo funcional $I$ dependiente de las funciones $Y$. Tenemos así un nuevo problema del tipo $(P_t)$, es decir, consiste en minimizar $I$, donde las funciones admisibles $Y : [a, b] \to \mathbb{R}$ son de clase $C^1$ a trozos y se anulan en $x = a$ y en $x = b$. Notemos que la función que estamos integrando es de clase $C^2$, ya que $y_0$ y $f$ son de clase $C^3$ y $C^4$ respectivamente. A este problema se le denomina *problema accesorio o secundario*. Como sabemos que $\Phi''(0) \geq 0$, la función nula $Y_0(x) = 0$ es claramente un mínimo global de este problema. Por otra parte, podemos plantear la ecuación de Euler para este problema, que cumplirán la funciones admisibles que minimicen $I$ en todo el intervalo $[a, b]$, salvo en a lo sumo un número finito de puntos,

$$f^0_{yy}(x) Y(x) + f^0_{yy'}(x) Y'(x) - \frac{d}{dx}\left[f^0_{yy'}(x) Y(x) + f^0_{y'y'}(x) Y'(x)\right] = 0. \tag{3.6}$$

A esta ecuación se la denomina *ecuación de Jacobi*. A partir de ella, buscando soluciones no triviales que se anulen en los extremos, vamos a deducir otra condición necesaria para el problema básico $(P)$, pero antes introduciremos un par de definiciones que usaremos luego en el enunciado del teorema.

**Definición 3.2.7.** *Sea $f$ una función de 3 variables de clase $C^4$. Sea $y_0 : [a, b] \to \mathbb{R}$ un extremal de clase $C^3$ del problema básico $(P)$. Supongamos que $Y : [a, c] \to \mathbb{R}$, con $c \leq b$, es una función de clase $C^2([a, c])$ que verifica la ecuación de Jacobi para $y_0$ en $(a, c)$, cumple que $Y(a) = Y(c) = 0$ y no es idénticamente nula en ningún subintervalo de $[a, c]$. Entonces al punto $c$ se le llama punto conjugado de $a$ para el extremal $y_0$.*

**Definición 3.2.8.** *Sea $f$ una función de tres variables de clase $C^2$.*

- *Una terna $(x, y, y')$ perteneciente al dominio de definición de $f$ es regular si $f_{y'y'}(x, y, y') \neq 0$.*
- *Una función $y$ de clase $C^1([a, b])$ se dice regular si $f_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \neq 0$ para todo $x$ en $[a, b]$.*

Enunciamos a continuación esta condición necesaria, que es cierto modo dependiente de la Condición de Euler (Teorema 1.2.1) porque para comprobar que se cumple, habrá que calcular previamente los extremales obtenidos mediante ese resultado.

**Teorema 3.2.9** (Condición necesaria de Jacobi)**.** *Sea $f$ una función de 3 variables de clase $C^4$. Sea $y_0 : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función regular de clase $C^3$ que es un mínimo relativo fuerte del problema $(P)$. Entonces el intervalo $(a, b)$ no contiene ningún punto $c$ conjugado de $a$ para $y_0$.*

**Dem:** Por reducción al absurdo, supongamos que existe $c \in (a, b)$ punto conjugado de $a$ para $y_0$, es decir, existe una función $Y_0 : [a, c] \to \mathbb{R}$ de clase $C^2$ que es solución de la ecuación de Jacobi para $y_0$ en $(a, c)$, cumple que $Y_0(a) = Y_0(c) = 0$ y no es idénticamente nula en ningún subintervalo de $[a, c]$.

Puesto que $Y \equiv 0$ también verifica la ecuación de Jacobi, la función $Y_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$Y_1(x) = \begin{cases} Y_0(x) & \text{si } x \in [a, c), \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

es a su vez otra solución de la ecuación (3.6), que en general es de clase $C^1$ a trozos. Además, veamos que $Y_1$ es un mínimo de $I$:

$$I(Y_1) = \int_a^c F(x, Y_0(x), Y_0'(x))dx + \int_c^b F(x, 0, 0)dx,$$

donde el último sumando es nulo al ser $F(x, 0, 0) = 0$. Dado que se cumple la igualdad siguiente

$$F(x, Y_0(x), Y_0'(x)) = \frac{1}{2} F_Y\left(x, Y_0(x), Y_0'(x)\right) Y_0(x) + \frac{1}{2} F_{Y'}\left(x, Y_0(x), Y_0'(x)\right) Y_0'(x),$$

integramos por partes el segundo sumando y tenemos

$$\begin{aligned} I(Y_1) = \int_a^c F(x, Y_0(x), Y_0'(x))dx &= \left[\frac{1}{2} F_{Y'}\left(x, Y_0(x), Y_0'(x)\right) Y_0(x)\right]_{x=a}^{x=c} \\ &+ \frac{1}{2} \int_a^c \left[F_Y\left(x, Y_0(x), Y_0'(x)\right) - \frac{d}{dx} F_{Y'}\left(x, Y_0(x), Y_0'(x)\right)\right] Y_0(x)dx. \end{aligned}$$

El primer sumando se anula porque $Y_0(a) = Y_0(c) = 0$ y el segundo es cero porque el primer factor de la integral se corresponde con la ecuación de Jacobi, de la cual $Y_0$ es una solución por hipótesis, por lo que $I(Y_1) = 0$. Por lo tanto, como $I(Y) \geq 0$ para toda función $Y$ admisible para este problema, $Y_1$ es un mínimo de $I$.

Por otro lado, supongamos que $Y_1$ es $C^1$ en todo el intervalo $[a, b]$ y llegaremos a un absurdo. Como $y_0$ es regular, $f^0_{y'y'}(x)$ no se anula en $x = c$ y por ser $f^0_{y'y'}(x)$ continua, existe un intervalo $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ donde $f^0_{y'y'}(x) \neq 0$ para todo $x$ en el intervalo. Por lo tanto, en ese intervalo la ecuación de Jacobi es una EDO lineal de segundo orden. Puesto que todos los coeficientes de esta ecuación son continuos, por el Teorema de existencia y unicidad de solución del problema de Cauchy, existe una única solución de la ecuación de Jacobi en el intervalo $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ que es $C^1$ y cumple las condiciones iniciales $Y(c) = Y'(c) = 0$. Claramente esa función es $Y \equiv 0$. Sin embargo, aplicando la Proposición 3.2.5, tenemos que $Y_1$ es de clase $C^2(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, es solución de la ecuación de Jacobi y verifica las condiciones iniciales, por lo que ha de ser $Y_1 \equiv 0$ en ese intervalo. Por consiguiente, $Y_0$ se anula en un intervalo de longitud positiva, en contra de nuestra hipótesis. Por lo tanto, $Y_1'$ no puede ser continua en $x = c$.

En consecuencia, $\lim_{x\to c^+} Y_1'(x) = 0 \neq \lim_{x\to c^-} Y_1'(x) = \lim_{x\to c^-} Y_0'(x)$. Como $Y_1$ es un mínimo de $I$, tiene que cumplir la Primera Condición de Erdmann en $x = c$, es decir,

$$\lim_{x\to c^-} F_{Y'}\left(x, Y_1(x), Y_1'(x)\right) = \lim_{x\to c^+} F_{Y'}\left(x, Y_1(x), Y_1'(x)\right).$$

No obstante, sabiendo que $y_0$ es regular y de clase $C^3$ y que, además, $Y_0(c) = 0$,

$$\lim_{x\to c^-} F_{Y'}\left(x, Y_1(x), Y_1'(x)\right) = \lim_{x\to c^-} 2f^0_{yy'}(x)Y_0(x) + 2f^0_{y'y'}(x)Y_0'(x) = \lim_{x\to c^-} 2f^0_{y'y'}(x)Y_0'(x) \neq 0.$$

Sin embargo, $\lim_{x\to c^+} F_{Y'}\left(x, Y_1(x), Y_1'(x)\right) = 0$ e $Y_1$ no verifica la condición, así que no puede ser un mínimo de $I$, luego existe alguna función admisible $Y^*$ con $I(Y^*) < 0$. Esto contradice la hipótesis de que $y_0$ es un mínimo, lo que completa la demostración. ■

Vamos a aplicar esta condición al Ejemplo 1.2.2 con el que trabajamos en el capítulo del problema básico $(P)$.

**Ejemplo 3.2.10.** *Estudiar la Condición de Jacobi para el funcional* $J(y) = \int_0^2 \left[3(y'(x))^2 + 4y(x)\right] dx$ *con las condiciones de frontera* $y(0) = 0$ *e* $y(2) = 1$.

El único extremal admisible para este problema era $y(x) = x^2/3 - x/6$. En este caso, la ecuación de Jacobi es muy sencilla porque $f_{yy} = f_{yy'} = 0$ y tiene la forma $6Y''(x) = 0$. Por lo tanto, $Y(x) = Ax + B$ con $A, B \in \mathbb{R}$ y esta función sólo se anula en un punto, luego no puede haber ningún punto conjugado de $a = 0$ para $y(x) = x^2/3 - x/6$. Por consiguiente, la Condición de Jacobi se cumple para este extremal, aunque como en este ejemplo la ecuación de Jacobi no depende de $y$ ni de $y'$ también se verificaría el teorema anterior para cualquier otro extremal admisible si los hubiera (aunque no los hay).

### 3.2.2. Condición de Weierstrass

Ahora vamos a mostrar otra condición necesaria para el problema $(P)$, que en este caso también únicamente será válida para mínimos relativos fuertes. Para hallar esta condición, vamos a partir de otra familia de funciones admisibles dependientes de un parámetro. Esta familia estará formada por funciones definidas a trozos y eso nos impedirá garantizar que cada función de la familia sea $C^1$. En consecuencia, no podremos trabajar con la distancia $d_1$ y por eso la condición que vamos a deducir sólo valdrá para mínimos relativos fuertes. De esta forma, compararemos el valor del funcional en nuestro mínimo $y_0$ y sobre dicha familia de funciones, como se explica en [4].

Supongamos que $y_0$ es un mínimo relativo fuerte de nuestro problema básico $(P)$ de clase $C^2$. Fijamos un punto $x_0 \in (a, b)$ y consideramos una función de clase $C^1$ arbitraria $y_1 : [a, x_0] \to \mathbb{R}$ que verifique que $y_1(x_0) = y_0(x_0)$. Ahora definimos una familia de funciones dependientes del parámetro $\alpha$, con $a < \alpha \leq x_0$:

$$y(x, \alpha) = \begin{cases} y_2(x, \alpha) & \text{si} \quad a \leq x < \alpha, \\ y_1(x) & \text{si} \quad \alpha \leq x < x_0, \\ y_0(x) & \text{si} \quad x_0 \leq x \leq b, \end{cases}$$

donde $y_2(x, \alpha) = y_0(x) + \dfrac{x - a}{\alpha - a}\left(y_1(\alpha) - y_0(\alpha)\right)$ (véase Figura 3.5).

Toda función $y(x, \alpha)$ es continua y cumple las condiciones de frontera, ya que $y(a, \alpha) = y_0(a)$ e $y(b, \alpha) = y_0(b)$, pero no podemos asegurar que sea derivable. Además, $y_0$ pertenece a esta familia de funciones cuando $\alpha = x_0$. Definimos la función $\hat{\Phi}$ para $\alpha \in (a, x_0]$ de la siguiente manera:

$$\hat{\Phi}(\alpha) = J(y(x, \alpha)) - J(y_0(x)) \quad x \in [a, b].$$

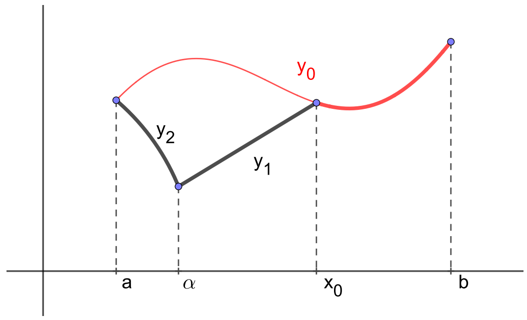


Figura 3.5: Gráfica de una función $y(x,\alpha)$ en trazo grueso (en rojo la función $y_0$).

Notemos que para cada $\varepsilon > 0$, como $y(x,\alpha)$ es una función definida a trozos, cuando $|x_0 - \alpha|$ es suficientemente pequeño,

$$\begin{aligned} d_0(y(x,\alpha), y_0(x)) &= \max\left\{ \max_{x\in[a,\alpha]} \left|\frac{x-a}{\alpha-a}(y_1(\alpha)-y_0(\alpha))\right|, \max_{x\in[\alpha,x_0]} |y_1(x)-y_0(x)|\right\} \\ &= \max_{x\in[\alpha,x_0]} |y_1(x)-y_0(x)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

ya que $y_1(x_0) = y_0(x_0)$ y ambas funciones son continuas. Teniendo en cuenta lo anterior y que $y_0$ es un mínimo relativo fuerte del problema $(P)$, existirá un cierto $\delta_0 > 0$ tal que si $|x_0 - \alpha| < \delta_0$, entonces la función $\hat{\Phi}$ será siempre mayor o igual que 0 y tendrá un mínimo relativo en el punto $\alpha = x_0$, ya que $\hat{\Phi}(x_0) = J(y(x,x_0)) - J(y_0(x)) = J(y_0) - J(y_0) = 0$. Además, notemos que como para cada $\alpha \in (a, x_0]$, tenemos que $y(x,\alpha) = y_0(x)$ para todo $x \in [x_0, b]$, podemos reducir la expresión de $\hat{\Phi}$ a:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(\alpha) = J(y(x,\alpha)) - J(y_0(x)) = \int_a^\alpha f\left(x, y_2(x,\alpha), \frac{\partial}{\partial x}y_2(x,\alpha)\right)dx + \int_\alpha^{x_0} f(x,y_1(x),y_1'(x))dx \\ - \int_a^{x_0} f(x,y_0(x),y_0'(x))dx, \end{aligned} \tag{3.7}$$

donde el último término no depende de $\alpha$.

Si $\hat{\Phi}$ fuese derivable en $x_0$, como este punto está en el extremo derecho del dominio de definición de la función, sólo podría existir una derivada lateral y, puesto que $\hat{\Phi}$ tiene un mínimo en $\alpha = x_0$, tendríamos:

$$\lim_{\alpha\to x_0^-} \frac{\hat{\Phi}(\alpha) - \hat{\Phi}(x_0)}{\alpha - x_0} = \hat{\Phi}'(x_0) \leq 0. \tag{3.8}$$

Vamos a ver que $\hat{\Phi}$ es derivable en $x_0$. Esto nos lo garantiza la fórmula de Leibniz, que es válida en $(a, x_0)$ y por ser $\hat{\Phi}$ una función continua, podemos pasar al límite y llegar a que también es válida en el extremo del intervalo $\alpha = x_0$. Además, nos permite calcular $\hat{\Phi}'(x_0)$:

$$\hat{\Phi}'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\left[\int_a^\alpha f\left(x, y_2(x,\alpha), \frac{\partial}{\partial x}y_2(x,\alpha)\right)dx + \int_\alpha^{x_0} f(x,y_1(x),y_1'(x))dx\right]$$

$$= f(\alpha, y_2(\alpha,\alpha), \frac{\partial}{\partial x}y_2(\alpha,\alpha)) + \int_a^\alpha \left[f_y(x)\frac{\partial}{\partial\alpha}y_2(x,\alpha) + f_{y'}(x)\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial x}y_2(x,\alpha)\right]dx - f(\alpha, y_1(\alpha), y_1'(\alpha)),$$

donde $f_y(x) = f_y\left(x, y_2(x,\alpha), \frac{\partial}{\partial x}y_2(x,\alpha)\right)$ y $f_{y'}(x) = f_{y'}\left(x, y_2(x,\alpha), \frac{\partial}{\partial x}y_2(x,\alpha)\right)$.

Usando el paso al límite que mencionamos antes tenemos

$$\hat{\Phi}'(x_0) = f\left(x_0, y_2(x_0,x_0), \frac{\partial}{\partial x}y_2(x_0,x_0)\right) + \int_a^{x_0}\left[f_y^0(x)\frac{\partial}{\partial\alpha}y_2(x,x_0) + f_{y'}^0(x)\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial x}y_2(x,x_0)\right]dx$$
$$-f(x_0,y_1(x_0),y_1'(x_0)),$$

donde $f_y^0(x) = f_y\left(x, y_2(x,x_0), \frac{\partial}{\partial x}y_2(x,x_0)\right)$ y $f_{y'}^0(x) = f_{y'}\left(x, y_2(x,x_0), \frac{\partial}{\partial x}y_2(x,x_0)\right)$.

Como las derivadas parciales cruzadas de $y_2$ existen y son continuas (por ser $y_0$ e $y_1$ de clase $C^1$), tenemos la igualdad de las derivadas cruzadas: $\frac{\partial^2 y_2}{\partial\alpha\partial x}(x,\alpha) = \frac{\partial^2 y_2}{\partial x\partial\alpha}(x,\alpha)$. De esta forma, integramos por partes el segundo sumando de la integral y tenemos

$$\int_a^{x_0} f_{y'}^0(x)\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial x}y_2(x,x_0)\,dx = \left[f_{y'}^0(x)\frac{\partial}{\partial\alpha}y_2(x,x_0)\right]_{x=a}^{x=x_0} - \int_a^{x_0}\frac{d}{dx}\left(f_{y'}^0(x)\right)\frac{\partial}{\partial\alpha}y_2(x,x_0)dx.$$

Por otro lado, usamos la expresión de $y_2$ y las propiedades de $y_1$. Así podemos ver que $y_2(\alpha,\alpha) = y_1(\alpha)$ para todo $\alpha \in (a, x_0]$. Derivando, llegamos a

$$\frac{\partial}{\partial x}y_2(\alpha,\alpha) + \frac{\partial}{\partial\alpha}y_2(\alpha,\alpha) = y_1'(\alpha) \quad \forall\alpha \in (a,x_0].$$

Además, $y_2(x,x_0) = y_0(x)$ para todo $x \in [a,x_0]$, ya que $y_1(x_0) = y_0(x_0)$, y, en consecuencia, tenemos que $\frac{\partial}{\partial x}y_2(x_0,x_0) = y_0'(x_0)$.

Por último, como $y_2(a,\alpha) = y_0(a)$ para cada $\alpha \in (a,x_0]$, tenemos $\frac{\partial}{\partial\alpha}y_2(a,\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in (a,x_0]$.

Aplicando las consideraciones anteriores,

$$\left[f_{y'}^0(x)\frac{\partial}{\partial\alpha}y_2(x,x_0)\right]_{x=a}^{x=x_0} = f_{y'}^0(x_0)\frac{\partial}{\partial\alpha}y_2(x_0,x_0) = f_{y'}^0(x_0)\left[y_1'(x_0) - \frac{\partial}{\partial x}y_2(x_0,x_0)\right]$$
$$= f_{y'}^0(x_0)\left[y_1'(x_0) - y_0'(x_0)\right].$$

Por último, sustituimos todo en la expresión de $\hat{\Phi}'(x_0)$:

$$\hat{\Phi}'(x_0) = f(x_0,y_0(x_0),y_0'(x_0)) - f(x_0,y_0(x_0),y_1'(x_0)) + f_{y'}^0(x_0)\left[y_1'(x_0) - y_0'(x_0)\right]$$
$$+\int_a^{x_0}\left[f_y^0(x) - \frac{d}{dx}f_{y'}^0(x)\right]\frac{\partial}{\partial\alpha}y_2(x,x_0)dx,$$

con $f_y^0(x) = f_y\left(x,y_0(x),y_0'(x)\right)$ y $f_{y'}^0(x) = f_{y'}\left(x,y_0(x),y_0'(x)\right)$.

Como $y_0$ era una solución del problema $(P)$ por hipótesis, en particular cumple la ecuación de Euler (1.1), luego la integral anterior es nula y finalmente obtenemos

$$\hat{\Phi}'(x_0) = f(x_0,y_0(x_0),y_0'(x_0)) - f(x_0,y_0(x_0),y_1'(x_0)) + f_{y'}^0(x_0)\left[y_1'(x_0) - y_0'(x_0)\right]. \tag{3.9}$$

A partir de las expresiones (3.8) y (3.9) vamos a conseguir una condición necesaria para el problema $(P)$ de esta sección. Puesto que esta última expresión va a aparecer con frecuencia, damos una definición.

**Definición 3.2.11.** *Sea $G$ un abierto de $\mathbb{R}^3$ y sea $f$ una función de tres variables de clase $C^2$. Llamamos función $E$ de Weierstrass a la función $E : G\times\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ definida por*

$$E(x,y,p,q) = f(x,y,q) - f(x,y,p) - f_p(x,y,p)(q-p).$$

**Teorema 3.2.12** (Condición necesaria de Weierstrass)**.** *Sea $y_0$ un mínimo relativo fuerte del problema $(P)$ de clase $C^2$ y sea $f$ una función de tres variables de clase $C^2$, entonces para todo $q \in \mathbb{R}$ y para todo $x \in [a,b]$,*

$$E(x,y_0(x),y_0'(x),q) \geq 0.$$

**Dem:** Como $y_0$ y $f$ son de clase $C^2$ en todo el intervalo $[a, b]$, la función $\hat{\Phi}$ definida por la expresión (3.7) tiene derivada continua en el punto $\alpha = x_0$. Como $\hat{\Phi}$ posee un mínimo relativo fuerte en el extremo del intervalo en el que está definida (cuando $\alpha = x_0$), ha de ser $\hat{\Phi}'(x_0) \leq 0$ por lo visto en (3.8). Aplicando la expresión (3.9) y la definición de la función $E$ de Weierstrass, llegamos a

$$\hat{\Phi}'(x_0) = -E(x_0, y_0(x_0), y_0'(x_0), y_1'(x_0)) \leq 0.$$

Puesto que el valor de $q = y_1'(x_0)$ no ha intervenido en la prueba y $x_0$ es un punto arbitrario de $(a, b)$, hemos concluido la prueba.

■

**Ejemplo 3.2.13.** *Estudiar si se verifica la Condición de Weierstrass para el Ejemplo 1.2.2 dado por el funcional* $J(y) = \int_0^2 \left[3(y'(x))^2 + 4y(x)\right] dx$ *con las condiciones de frontera* $y(0) = 0$ *e* $y(2) = 1$.

Ya sabíamos que el único extremal admisible para este problema era $y(x) = x^2/3 - x/6$, por lo que definimos la función $E$ para $y(x)$ y vamos a ver que es no negativa:

$$\begin{aligned} E(x, y, y', q) &= f(x, y, q) - f(x, y, y') - f_{y'}(x, y, y')(q - y') = 3q^2 + 4y - (3(y')^2 + 4y) - 6y'(q - y') \\ &= 3q^2 - 6y'q + 3(y')^2 = 3(q - y')^2 \geq 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, obtenemos que $E(x, y, y', q) \geq 0$ para cada $x \in [0, 2]$ y para cualquier $q \in \mathbb{R}$, luego la función $y(x) = x^2/3 - x/6$ cumple la Condición necesaria de Weierstrass para ser un mínimo relativo fuerte de $J(y)$.

# Capítulo 4

# Problemas con restricciones

Podemos considerar también problemas donde a las funciones admisibles se les exige que cumplan ciertas relaciones entre ellas, además de las condiciones de frontera. En este caso, se tratará de minimizar funcionales dependientes de varias funciones $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, como en el problema $(P_{y_n})$. Aquí nos centraremos en estudiar los casos de las restricciones dadas por ecuaciones diferenciales, es decir, cuando son de la forma $\varphi_i(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0$ para $i = 1, \ldots, m$, y de las restricciones isoperimétricas, que están dadas por integrales $\int_a^b f_i(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')dx = l_i$ con $l_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, m$.

## 4.1. Restricciones dadas por ecuaciones diferenciales

En primer lugar, vamos a considerar los problemas variacionales donde las restricciones consisten en ecuaciones diferenciales que involucran a las funciones incógnita y a sus derivadas primeras. En estos casos, habrá más de una función incógnita. Dados $n, m \in \mathbb{N}$, con $m < n$, vamos a trabajar con el funcional

$$J(\overline{y}) = J(y_1, \ldots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), \ldots, y_n'(x))dx,$$

con $a < b$ números reales fijos. La función $f$ depende de $2n+1$ variables y es de clase $C^2$ definida en $G$ abierto de $\mathbb{R}^{2n+1}$. Para este problema sólo se consideran como funciones admisibles las funciones $\overline{y} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ que sean $C^1$, cumplan que $(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x)) \in G$ para todo punto $x \in [a, b]$, verifiquen las condiciones de frontera $\overline{y}(a) = \overline{y_a}$ e $\overline{y}(b) = \overline{y_b}$, donde $\overline{y_a}, \overline{y_b} \in \mathbb{R}^n$ son fijos, y además satisfagan las ecuaciones $\varphi_i(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x)) = \varphi_i(x, y_1(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), \ldots, y_n'(x)) = 0$ para $i = 1, \ldots, m$. Las funciones $\varphi_i$ son al menos de clase $C^2$. De esta forma, trabajaremos con el problema $(P_{ec})$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, $\overline{y_a}, \overline{y_b} \in \mathbb{R}^n$ y $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ de clase $C^2$ están fijados:

$$(P_{ec}) : \begin{cases} \text{Encontrar } y \text{ función que minimiza } \int_a^b f(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x))dx \\ \text{sujeto a } \overline{y} \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^n) \text{ tal que } \overline{y}(a) = \overline{y_a},\ \overline{y}(b) = \overline{y_b}, \\ \varphi_i(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x)) = 0 \text{ para } i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

El método más adecuado para trabajar con este tipo de problemas se basa en adaptar las estrategias de la optimización con restricciones para funciones de varias variables. Concretamente, utilizaremos los multiplicadores de Lagrange y la función lagrangiana, aunque en este caso los multiplicadores serán funciones y no números. Recordemos la condición necesaria de primer orden para la optimización con restricciones, que viene dada por el teorema siguiente (ver, por ejemplo, [11]).

**Teorema 4.1.1** (Regla de los multiplicadores de Lagrange)**.** *Sean $f, h_1, \ldots, h_m : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones de clase $C^1$, donde $\Omega$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Sea $x_0 \in \Omega$ una solución de minimizar $f(x)$ sujeto a que*

*$x \in \Omega, h_i(x) = 0$ para $i = 1, \ldots, m$. Si $\nabla h_i(x_0)$ son linealmente independientes para $i = 1, \ldots, m$, entonces existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ verificando*

$$\nabla f(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(x_0) = 0.$$

Notemos que la condición anterior no es más que la condición necesaria de primer orden para la optimización sin restricciones aplicada a la función lagrangiana dada por $f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x)$. Por otra parte, enunciamos la condición necesaria para $(P_{ec})$ (ver, por ejemplo [6] y [16]).

**Teorema 4.1.2.** *Sean $m < n$ números naturales y $f, \varphi_i$ funciones de $2n+1$ variables de clase $C^2$ para cada $i = 1, \ldots, m$. Supongamos que la función admisible $\overline{y_0} \in C^2([a,b]; \mathbb{R}^n)$ es un mínimo relativo de $J(\overline{y})$ que cumple las ecuaciones $\varphi_i(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x)) = 0$ para $i = 1, \ldots, m$ y que además el rango de $A$ es $m$, donde $A$ es la matriz siguiente*

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_2'} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y_1'} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y_2'} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y_n'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'} & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial y_2'} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'} \end{pmatrix}.$$

*Entonces $\overline{y_0}$ satisface las ecuaciones de Euler del funcional*

$$J^*(\overline{y}) = \int_a^b f^*(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x))\, dx = \int_a^b \left( f(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x)) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \varphi_i(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x)) \right) dx,$$

*donde las funciones $\lambda_i(x)$ son de clase $C^1([a,b])$ y se determinan a partir de las ecuaciones de Euler de $J^*$ y de las restricciones $\varphi_i(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x)) = 0$ con $i = 1, \ldots, m$. A la función $f^*$ se la denomina función lagrangiana.*

**Dem:** Consideramos el subconjunto de las funciones admisibles para este problema dado por todas las funciones definidas en $[a,b]$ de la forma $\overline{y_\alpha}(x) = \overline{y_0}(x) + \alpha \overline{Y}(x)$, con $|\alpha| < \alpha_0$, siendo $\alpha_0$ un número estrictamente positivo lo suficientemente pequeño, e $\overline{Y}(x)$ una función $C^1([a,b]; \mathbb{R}^n)$ fijada con $\overline{Y}(a) = \overline{Y}(b) = \overline{0}$. Además, a la función $\overline{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ vamos a exigirle que verifique para cada $i$ con $i = 1, \ldots, m$, las restricciones

$$\varphi_i(x, y_{01}(x) + \alpha Y_1(x), \ldots, y_{0n}(x) + \alpha Y_n(x), y_{01}'(x) + \alpha Y_1'(x), \ldots, y_{0n}'(x) + \alpha Y_n'(x)) = 0. \tag{4.1}$$

Las funciones $\overline{y_\alpha}$ son admisibles para el problema $(P_{ec})$ y eso nos permite considerar el problema de minimizar el funcional $J$ dentro de este subconjunto, que relacionamos con un problema de optimización de una función de una sola variable. Así, $J(\overline{y_\alpha})$ depende sólo del valor de $\alpha$ y podemos definir la función $\Phi(\alpha)$:

$$\Phi(\alpha) = \int_a^b f(x, y_{01}(x) + \alpha Y_1(x), \ldots, y_{0n}(x) + \alpha Y_n(x), y_{01}'(x) + \alpha Y_1'(x), \ldots, y_{0n}'(x) + \alpha Y_n'(x))\, dx.$$

Este nuevo problema tiene un mínimo relativo en $\alpha = 0$ por ser $\overline{y_0}$ un mínimo local de $(P_{ec})$, por lo que $\Phi'(0) = 0$:

$$\Phi'(0) = \int_a^b \left( \sum_{j=1}^{n} f_{y_j}^0(x) Y_j(x) + f_{y_j'}^0(x) Y_j'(x) \right) dx = 0,$$

donde $f^0_{y_j}(x)$ e $f^0_{y'_j}(x)$ son las abreviaturas habituales. Integrando por partes llegamos a

$$\int_a^b \sum_{j=1}^n \left( f^0_{y_j}(x) - \frac{d}{dx} f^0_{y'_j}(x) \right) Y_j(x) dx = 0. \tag{4.2}$$

En este punto de la demostración no podemos aplicar el Lema fundamental del cálculo de variaciones porque las variaciones $Y_j$ no son independientes unas de otras, sino que están relacionadas mediante las ecuaciones (4.1). Sin embargo, como estas igualdades son válidas para todo $\alpha < \alpha_0$, podemos derivar implícitamente (4.1) con respecto de $\alpha$ para cada $i = 1, \ldots, m$ y evaluar la expresión obtenida para $\alpha = 0$:

$$\sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \varphi_i^0}{\partial y_j}(x) Y_j(x) + \frac{\partial \varphi_i^0}{\partial y'_j}(x) Y'_j(x) \right) = 0,$$

donde $\varphi_i^0(x) = \varphi_i\left(x, y_{01}(x), \ldots, y_{0n}(x), y'_{01}(x), \ldots, y'_{0n}(x)\right)$. Ahora, fijado $i$, multiplicamos la expresión anterior por una cierta función de momento desconocida $\lambda_i(x) \in C^1([a,b])$ e integramos entre $a$ y $b$

$$\int_a^b \sum_{j=1}^n \left( \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i^0}{\partial y_j}(x) Y_j(x) + \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i^0}{\partial y'_j}(x) Y'_j(x) \right) dx = 0.$$

A continuación, integramos por partes el segundo término del sumatorio para cada $j$ y empleamos que $Y_j(a) = Y_j(b) = 0$, llegando a

$$\int_a^b \sum_{j=1}^n \left[ \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i^0}{\partial y_j}(x) - \frac{d}{dx} \left( \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i^0}{\partial y'_j}(x) \right) \right] Y_j(x) dx = 0. \tag{4.3}$$

Sumamos miembro a miembro las ecuaciones (4.2) y (4.3) obteniendo

$$\int_a^b \sum_{j=1}^n \left[ f^0_{y_j}(x) - \frac{d}{dx} f^0_{y'_j}(x) + \sum_{i=1}^m \left( \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i^0}{\partial y_j}(x) - \frac{d}{dx} \left( \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i^0}{\partial y'_j}(x) \right) \right) \right] Y_j(x) dx = 0.$$

Ahora definimos la función $f^* = f + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i$ y así la igualdad anterior queda de la forma

$$\int_a^b \sum_{j=1}^n \left( f^*_{y_j}(x, \overline{y_0}(x), \overline{y_0}'(x)) - \frac{d}{dx} f^*_{y'_j}(x, \overline{y_0}(x), \overline{y_0}'(x)) \right) Y_j(x) dx = 0, \tag{4.4}$$

que son las ecuaciones de Euler del funcional $J^*(\overline{y}) = \int_a^b f^*\left(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x)\right) dx$ para la función $\overline{y_0}$.

Por otra parte, vamos a ver cómo se pueden hallar las funciones $\lambda_i(x)$ para $i = 1, \ldots, m$. Por hipótesis, sabemos que alguno de los determinantes de orden $m$ de la matriz $A$ es no nulo. Sin pérdida de generalidad, supongamos que el determinante formado por las $m$ primeras filas y columnas no es cero. En ese caso, en virtud del Teorema de la función implícita, podemos despejar localmente $y'_{0i}$ para $i = 1, \ldots, m$ de la forma $y'_{0i} = \psi_i(x, y_{01}, \ldots, y_{0n}, y'_{0m+1}, \ldots, y'_{0n})$. Por lo tanto, si consideramos que $y_{0m+1}, \ldots, y_{0n}$ son funciones dadas de forma arbitraria, entonces las funciones $y_{01}, \ldots, y_{0m}$ se pueden determinar a partir del sistema del sistema de ecuaciones anterior y sus variaciones $Y_1, \ldots, Y_m$ no son arbitrarias. En consecuencia, $y_{0m+1}, \ldots, y_{0n}$ son funciones derivables arbitrarias con valores frontera fijos y, por ello, sus variaciones $Y_{m+1}, \ldots, Y_n$ son arbitrarias.

Nos interesa entonces eliminar las variaciones $Y_1, \ldots, Y_m$ de la expresión (4.4) y para ello empleamos las funciones $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)$. Tomando las $m$ primeras ecuaciones de Euler de $J^*$, obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que es lineal con respecto a las funciones incógnita $\lambda_i(x)$ y a sus derivadas. Como las ecuaciones son linealmente independientes porque el determinante formado por las $m$ primeras filas y columnas de $A$ no es cero y todos los coeficientes del sistema son continuos, el sistema tiene una solución $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)$ dependiente de $m$ constantes. Con esta elección de las funciones $\lambda_i(x)$ para $i = 1, \ldots, m$, la ecuación (4.4) queda de la forma

$$\int_a^b \sum_{j=m+1}^{n} \left( f^*_{y_j}(x, \overline{y_0}(x), \overline{y_0}'(x)) - \frac{d}{dx} f^*_{y'_j}(x, \overline{y_0}(x), \overline{y_0}'(x)) \right) Y_j(x)dx = 0.$$

Estas variaciones $Y_j$ ya sí son arbitrarias, con lo que haciendo $Y_k = 0$ para $k = m+1, \ldots, n$ salvo para un cierto $j$ con $m+1 \leq j \leq n$, la ecuación (4.4) pasa a ser

$$\int_a^b \left( f^*_{y_j}(x, \overline{y_0}(x), \overline{y_0}'(x)) - \frac{d}{dx} f^*_{y'_j}(x, \overline{y_0}(x), \overline{y_0}'(x)) \right) Y_j(x)dx = 0,$$

y ya podemos aplicar el Lema fundamental del cálculo de variaciones, obteniendo

$$f^*_{y_j}(x, \overline{y_0}(x), \overline{y_0}'(x)) - \frac{d}{dx} f^*_{y'_j}(x, \overline{y_0}(x), \overline{y_0}'(x)) = 0. \tag{4.5}$$

Repitiendo el proceso anterior para cada $j = m+1, \ldots, n$, concluimos que la función $\overline{y_0}$ junto con las funciones $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ han de satisfacer las ecuaciones (4.5) para $j = 1, \ldots, n$ junto con las ecuaciones $\varphi_i(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x)) = 0$ con $i = 1, \ldots, m$. ■

**Nota 4.1.3.** Cambiando ligeramente el teorema anterior y su demostración, podemos obtener una condición necesaria para el caso en el que las funciones $\varphi_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ dependan sólo de las funciones $y_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ y no de sus derivadas, es decir, que se traten de ecuaciones algebraicas. En este caso, necesitaremos la hipótesis de que el rango de la matriz $B = (b_{ij})$ con $b_{ij} = \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}$ sea $m$.

La demostración es prácticamente idéntica. Tampoco las variaciones $Y_j$ para $j = 1, \ldots, n$ son independientes en este caso, por lo que no podemos aplicar el Lema fundamental del cálculo de variaciones a la expresión (4.4), pero como el rango de $B$ es $m$, suponiendo sin pérdida de generalidad que el determinante formado por las $m$ primeras filas y columnas no se anula, podemos despejar localmente $y_{0i}$ de la forma $y_{0i} = \psi_i(x, y_{0m+1}, \ldots, y_{0n})$ para $i = 1, \ldots, m$. Por lo tanto, sólo las variaciones $Y_{m+1}, \ldots, Y_n$ son arbitrarias.

Por último, al calcular el valor de las funciones $\lambda_i(x)$, en vez de un sistema de ecuaciones diferenciales, tendremos un sistema de ecuaciones algebraicas. Como el determinante formado por las $m$ primeras filas y columnas no es cero, podemos obtener el valor de cada $\lambda_i(x)$ para $i = 1, \ldots, m$. De esta forma, podemos concluir que el mínimo local $\overline{y_0}$ y las funciones $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ deben cumplir las ecuaciones (4.5) para $j = 1, \ldots, n$ junto con las ecuaciones $\varphi_i(x, \overline{y}) = 0$ con $i = 1, \ldots, m$.

Vamos a poner un ejemplo de un problema con restricciones, que en este caso serán de la forma $\varphi(x, \overline{y}) = 0$. Se trata de un caso particular del problema clásico de las líneas geodésicas que proviene de [14].

**Ejemplo 4.1.4.** *Encontrar la función $\overline{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))$ que minimiza la distancia entre dos puntos $(a_0, b_0, c_0)$ y $(a_1, b_1, c_1)$ de una esfera de radio $r > 0$ centrada en el origen.*

Tenemos que minimizar el funcional $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(y_1'(t))^2 + (y_2'(t))^2 + (y_3'(t))^2}dt$ con la restricción dada por $(y_1(t))^2 + (y_2(t))^2 + (y_3(t))^2 - r^2 = 0$ y las condiciones de frontera $(y_1(t_0), y_2(t_0), y_3(t_0)) = (a_0, b_0, c_0)$ e $(y_1(t_1), y_2(t_1), y_3(t_1)) = (a_1, b_1, c_1)$. Consideramos la función lagrangiana

$$f^*(t, y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3') = \sqrt{(y_1')^2 + (y_2')^2 + (y_3')^2} + \lambda \left( y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - r^2 \right)$$

y calculamos sus ecuaciones de Euler

$$\begin{cases} 2\lambda y_1 - \dfrac{d}{dt}\dfrac{y_1'}{\sqrt{(y_1')^2+(y_2')^2+(y_3')^2}} = 0, \\ 2\lambda y_2 - \dfrac{d}{dt}\dfrac{y_2'}{\sqrt{(y_1')^2+(y_2')^2+(y_3')^2}} = 0, \\ 2\lambda y_3 - \dfrac{d}{dt}\dfrac{y_3'}{\sqrt{(y_1')^2+(y_2')^2+(y_3')^2}} = 0. \end{cases}$$

Eliminando $\lambda$ llegamos a

$$\frac{1}{y_1}\frac{d}{dt}\frac{y_1'}{\sqrt{(y_1')^2+(y_2')^2+(y_3')^2}} = \frac{1}{y_2}\frac{d}{dt}\frac{y_2'}{\sqrt{(y_1')^2+(y_2')^2+(y_3')^2}} = \frac{1}{y_3}\frac{d}{dt}\frac{y_3'}{\sqrt{(y_1')^2+(y_2')^2+(y_3')^2}}.$$

Llamando $f = \sqrt{(y_1')^2+(y_2')^2+(y_3')^2}$ y derivando

$$\frac{fy_1''-y_1'f'}{y_1f^2} = \frac{fy_2''-y_2'f'}{y_2f^2} = \frac{fy_3''-y_3'f'}{y_3f^2}.$$

Reorganizando los términos

$$\frac{y_1y_2''-y_2y_1''}{y_1y_2'-y_2y_1'} = \frac{f'}{f} = \frac{y_2y_3''-y_3y_2''}{y_2y_3'-y_3y_2'}$$

y obviando el término central,

$$\frac{(y_1y_2'-y_2y_1')'}{y_1y_2'-y_2y_1'} = \frac{(y_2y_3'-y_3y_2')'}{y_2y_3'-y_3y_2'}.$$

Integrando tenemos que $y_1y_2'-y_2y_1' = C_1(y_2y_3'-y_3y_2')$, es decir,

$$\frac{y_1'+C_1y_3'}{y_1+C_1y_3} = \frac{y_2'}{y_2}.$$

Volviendo a integrar obtenemos la ecuación de un plano que pasa por el origen $y_1 - C_2y_2 + C_1y_3 = 0$, de donde concluimos que la distancia mínima entre dos puntos de una esfera sólo podría alcanzarse en un círculo máximo. Las constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ pueden determinarse a partir de las condiciones de frontera.

## 4.2. Restricciones isoperimétricas

Aunque inicialmente se consideraban como problemas isoperimétricos sólo a aquellos que consistían en encontrar la figura geométrica de área máxima con un perímetro dado, como ya vimos en la introducción, ahora vamos a extenderlos al problema de minimizar un funcional sujeto a unas restricciones determinadas por integrales, como se hace en [6].

El problema es similar a $(P_{ec})$ salvo por el cambio en la forma de las restricciones. Por ello, dados $n, m \in \mathbb{N}$, con $m < n$, suponemos que el funcional $J$ depende de varias funciones y de sus derivadas primeras

$$J(\overline{y}) = J(y_1,\dots,y_n) = \int_a^b f(x, y_1(x),\dots,y_n(x),y_1'(x),\dots,y_n'(x))dx,$$

con $a < b$ números reales fijos. La función $f$ depende de $2n+1$ variables y es de clase $C^2$ definida en $G$, siendo $G$ un abierto de $\mathbb{R}^{2n+1}$. Las funciones admisibles son aquellas funciones $\overline{y} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

de clase $C^1$ que cumplen $(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x)) \in G$ para todo punto $x \in [a, b]$, verifican las condiciones de frontera $\overline{y}(a) = \overline{y_a}$ e $\overline{y}(b) = \overline{y_b}$, donde $\overline{y_a}, \overline{y_b} \in \mathbb{R}^n$ son fijos, y satisfacen las condiciones isoperimétricas

$$\int_a^b f_i(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x))dx = l_i$$

para $i = 1, \ldots, m$ con $l_1, \ldots, l_m \in \mathbb{R}$. De este modo, dados $a, b, l_1, \ldots, l_m \in \mathbb{R}$, $\overline{y_a}, \overline{y_b} \in \mathbb{R}^n$ y $f_1, \ldots, f_m$ de clase $C^2$, denotaremos $(P_{iso})$ al problema siguiente:

$$(P_{iso}) : \begin{cases} \text{Encontrar } y \text{ función que minimiza } \int_a^b f(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x))dx \\ \text{sujeto a } \overline{y} \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^n) \text{ tal que } \overline{y}(a) = \overline{y_a},\ \overline{y}(b) = \overline{y_b}, \\ \int_a^b f_i(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x))dx = l_i \text{ para } i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Vamos a ver que estos problemas pueden ser reducidos a los considerados en la sección anterior añadiendo unas nuevas funciones incógnita. Por lo tanto, volveremos a trabajar con la función lagrangiana y con los multiplicadores de Lagrange, aunque en este problema éstos últimos serán funciones constantes.

**Teorema 4.2.1.** *Sean $m < n$ números naturales y $f, f_i$ funciones de $2n+1$ variables de clase $C^2$ para cada $i = 1, \ldots, m$. Supongamos que la función admisible $\overline{y_0} \in C^2([a, b]; \mathbb{R}^n)$ es un mínimo relativo de $J(\overline{y})$ que cumple las restricciones $\int_a^b f_i(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x))dx = l_i$ para $i = 1, \ldots, m$ y que además el rango de la matriz $\tilde{A} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial y_j}, \frac{\partial f_i}{\partial y_j'} \right)$ es $m$ ($j = 1, \ldots, n$). Entonces $\overline{y_0}$ satisface las ecuaciones de Euler del funcional*

$$J^{**}(\overline{y}) = \int_a^b f^{**}\left(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x)\right) dx = \int_a^b \left( f(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x)) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x)) \right) dx,$$

*donde los coeficientes $\lambda_i \in \mathbb{R}$ se determinan a partir de las ecuaciones de Euler de $J^{**}$ y de las restricciones $\int_a^b f_i(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x))dx = l_i$ para $i = 1, \ldots, m$.*

**Dem:** Vamos a reducir este problema a uno de la forma de $(P_{ec})$, es decir, con restricciones de ecuaciones diferenciales $\varphi_i = 0$ para $i = 1, \ldots, m$.

Para cada $i$, definimos la función $z_i(x) = \int_a^x f_i(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x))dx$, que verifica $z_i(a) = 0$ y $z_i(b) = l_i$. Derivando usando la fórmula de Leibniz, tenemos, para cada $i = 1, \ldots, m$

$$z_i'(x) = f_i(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x)).$$

Por lo tanto, se trata de un problema de tipo $(P_{ec})$ con las restricciones

$$\varphi_i\left(x, y_1(x), ..., y_n(x), z_1(x), ..., z_m(x), y_1'(x), ..., y_n'(x), z_1'(x), ..., z_m'(x)\right) = f_i(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x)) - z_i'(x) = 0.$$

En consecuencia, podemos aplicar el Teorema 4.1.2 puesto que se cumplen las hipótesis allí exigidas (notemos que la matriz $A$ tiene rango $m$), por lo que el mínimo $\overline{y_0}$ de $(P_{iso})$ tiene que satisfacer las ecuaciones de Euler del funcional

$$\begin{aligned} J^*(y_1, ..., y_n, z_1, ..., z_m) &= \int_a^b f^*\left(x, y_1(x), ..., y_n(x), z_1(x), ..., z_m(x), y_1'(x), ..., y_n'(x), z_1'(x), ..., z_m'(x)\right) dx \\ &= \int_a^b [f(x, y_1(x), ..., y_n(x), y_1'(x), ..., y_n'(x)) \\ &+ \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \left(f_i(x, y_1(x), ..., y_n(x), y_1'(x), ..., y_n'(x)) - z_i'(x)\right)]dx, \end{aligned}$$

que son, para $x \in (a,b)$,

$$\begin{aligned} f^*_{y_j}\left(x, \overline{y_0}(x), \overline{y_0}'(x)\right) - \frac{d}{dx} f^*_{y'_j}(x, \overline{y_0}(x), \overline{y_0}'(x)) &= 0 & j = 1, \ldots, n, \\ f^*_{z_i}\left(x, \overline{y_0}(x), \overline{y_0}'(x)\right) - \frac{d}{dx} f^*_{z'_i}(x, \overline{y_0}(x), \overline{y_0}'(x)) &= \frac{d}{dx}\lambda_i(x) = 0 & i = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

De las últimas $m$ ecuaciones obtenemos que las funciones $\lambda_i(x)$ han de ser constantes para $i = 1, \ldots, m$. Por lo tanto, basta considerar las primeras $n$ ecuaciones de Euler, que coinciden con las del funcional $J^{**}$. ■

El teorema anterior también se puede demostrar sin necesidad de utilizar el Teorema 4.1.2 usando una familia de funciones admisibles similar a $\overline{y_\alpha}$ pero dependiente de más parámetros (ver, por ejemplo, [16]).

Vamos a aplicar el teorema al problema isoperimétrico que ya presentamos en la introducción (ver [14] y [16], por ejemplo).

**Ejemplo 4.2.2.** Se trata de encontrar la curva cerrada plana de una longitud dada $L$ que encierra el área máxima y que pasa por dos puntos dados $(a_0, b_0)$ y $(a_1, b_1)$ del plano. Vamos a considerar la curva escrita en forma paramétrica $(y_1(t), y_2(t))$, por lo que hay que maximizar el funcional $\int_{t_0}^{t_1} (y_1(t)y'_2(t) - y_2(t)y'_1(t))\, dt/2$ con la restricción dada por la integral $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(y'_1(t))^2 + (y'_2(t))^2} dt = L$.

Consideramos la función lagrangiana

$$f^{**}(t, y_1, y_2, y'_1, y'_2) = \frac{1}{2}\left(y_1 y'_2 - y_2 y'_1\right) + \lambda\sqrt{(y'_1)^2 + (y'_2)^2}$$

y calculamos sus ecuaciones de Euler:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{1}{2}y_2 + \dfrac{\lambda y'_1}{\sqrt{(y'_1)^2 + (y'_2)^2}}\right) - \dfrac{1}{2}y'_2 = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}y_1 + \dfrac{\lambda y'_2}{\sqrt{(y'_1)^2 + (y'_2)^2}}\right) + \dfrac{1}{2}y'_1 = 0, \end{cases}$$

que pueden integrarse directamente obteniendo

$$-y_2 + \frac{\lambda y'_1}{\sqrt{(y'_1)^2 + (y'_2)^2}} = -C_1, \qquad y_1 + \frac{\lambda y'_2}{\sqrt{(y'_1)^2 + (y'_2)^2}} = -C_2, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Operando llegamos a

$$(y_1 - C_2)^2 + (y_2 - C_1)^2 = \lambda^2,$$

que es la ecuación de una circunferencia. Por lo tanto, la única curva que cumple la condición necesaria para maximizar el área es la circunferencia de centro $(C_2, C_1)$ y radio $L/2\pi$. El valor de las constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ se puede determinar a partir de las condiciones de frontera $(y_1(t_0), y_2(t_0)) = (a_0, b_0)$ e $(y_1(t_1), y_2(t_1)) = (a_1, b_1)$.

# Bibliografía


[1] D. Azagra. Cálculo Integral. Universidad Complutense de Madrid. 2007. http://www.mat.ucm.es/~dazagrar/docencia/ci.pdf

[2] J.M. Bayod. Cálculo integral. Universidad de Cantabria. 2017.

[3] P. Blanchard, E. Brüning. Variational Methods in Mathematical Physics. Springer-Verlag. 1992.

[4] U. Brechtken-Manderscheid. Introduction to the Calculus of Variations. Chapman & Hall. 1991.

[5] E. Cerdá. Optimización Dinámica. Prentice Hall. 2001.

[6] L. Elsgoltz. Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional. Editorial MIR. 1992.

[7] L.A. Fernández. Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales. Universidad de Cantabria. 2018.

[8] L. Komzsik. Applied Calculus of Variations for Engineers. CRC Press. 2009.

[9] E. Kreyszig. On the Calculus of Variations and Its Major Influences on the Mathematics of the First Half of Our Century. Part I. The American Mathematical Monthly, Vol. 101, No. 7. 1994, pp. 674-678.

[10] E. Kreyszig. On the Calculus of Variations and Its Major Influences on the Mathematics of the First Half of Our Century. Part II. The American Mathematical Monthly, Vol. 101, No. 9. 1994, pp. 902-908.

[11] C. Pola. Optimización con Restricciones. Universidad de Cantabria. 2019.

[12] B. Porras. Ampliación de Análisis de Varias Variables Reales. Universidad de Cantabria. 2009.

[13] H. Sagan. Introduction to the Calculus of Variations. Dover Publications, Inc. 1992.

[14] G. Simmons. Differential Equations with Applications and Historical Notes. McGraw-Hill. 1991.

[15] J. Vinuesa. Ampliación de Cálculo Integral. Universidad de Cantabria. 2018.

[16] R. Weinstock. Calculus of Variations with Applications to Physics and Engineering. Dover Publications, Inc. 1974.

# Anexo: Resolución de algunos problemas clásicos

Mostramos a continuación la resolución de los 3 primeros problemas clásicos que planteamos en la introducción, es decir, los problemas de la braquistócrona, de la superficie mínima de revolución y de la línea más corta que une dos puntos.

Antes de mostrar la resolución, notemos que cuando tenemos un funcional que no depende de la variable independiente $x$, es decir, de la forma

$$\int_a^b f(y(x), y'(x))dx,$$

la ecuación de Euler puede escribirse de una forma más sencilla:

$$0 = y'\left(f_y - \frac{d}{dx}f_{y'}\right) = y'\left(f_y - f_{xy'} - f_{yy'}y' - f_{y'y'}y''\right) = f_y y' - y' f_{y'y}y' - y' f_{y'y'}y'' = \frac{d}{dx}\left(f - y' f_{y'}\right),$$

ya que $f_{xy'} = 0$. Por lo tanto, la ecuación de Euler puede integrarse, obteniendo

$$f - y' f_{y'} = C \qquad C \in \mathbb{R}.$$

## Problema de la braquistócrona

Como ya dedujimos en la introducción, el problema consiste en minimizar el funcional

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}dx,$$

sujeto a las condiciones de frontera $y(0) = 0$, $y(b) = y_b$. Como se trata de un problema básico, aplicamos la Condición de Euler del Teorema 1.2.1 usando que la función a integrar no depende de la variable independiente $x$, por lo que como hemos visto dicha ecuación diferencial es

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} - y'\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+(y')^2}} = C \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Operando tenemos que $y(1+(y')^2) = C_1$ con $C_1 \in \mathbb{R}$. Ahora hacemos el cambio de variable $y' = \mathrm{ctg}(t)$ como en [6], luego

$$y = \frac{C_1}{1+(y')^2} = \frac{C_1}{1+\mathrm{ctg}^2(t)} = \frac{C_1}{\frac{\sin^2(t)+\cos^2(t)}{\sin^2(t)}} = C_1\sin^2(t) = \frac{C_1}{2}(1-\cos(2t)).$$

Por otro lado,

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C_1\sin(t)\cos(t)dt}{\mathrm{ctg}(t)} = 2C_1\sin^2(t)dt = C_1(1-\cos(2t))dt, \qquad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Integrando la expresión anterior llegamos a

$$x = C_1\left(t - \frac{\sin(2t)}{2}\right) + C_2 = \frac{C_1}{2}(2t - \sin(2t)) + C_2 \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Como $y(0) = 0$, tenemos que $C_2 = 0$, y haciendo el cambio $2t = t_1$, finalmente obtenemos la expresión de una cicloide

$$\begin{cases} x = \dfrac{C_1}{2}(t_1 - \sin(t_1)), \\ y = \dfrac{C_1}{2}(1 - \cos(t_1)), \end{cases}$$

donde $C_1 \in \mathbb{R}$ se determina a partir de la condición $y(b) = b$.

Aunque aquí no podemos usar la condición suficiente del Teorema 1.3.5 porque no podemos asegurar que la función que integramos es convexa, mediante ciertas consideraciones físicas se sabe que el funcional $T$ ha de tener un mínimo y, como la cicloide es la única función que verifica la condición necesaria, concluimos que esta curva es un mínimo para el problema de la braquistócrona.

## Problema de la superficie mínima de revolución

Como ya vimos en la introducción, hay que minimizar el funcional

$$I = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}dx,$$

con las condiciones de frontera $y(a) = y_a$ e $y(b) = y_b$. Planteamos la ecuación de Euler

$$\sqrt{1 + (y')^2} - \frac{d}{dx}\frac{yy'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = 0,$$

que puede escribirse como

$$y\sqrt{1 + (y')^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R},$$

puesto que la función a integrar no depende de $x$. Despejando $y'$ llegamos a

$$y' = \frac{\sqrt{y^2 - C_1^2}}{C_1}, \qquad C_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

que es una ecuación de variables separadas cuya solución es

$$x = C_1 \log\left(\frac{y + \sqrt{y^2 - C_1^2}}{C_1}\right) + C_2, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad C_1 > 0.$$

El término de la derecha se corresponde con la expresión del arco coseno hiperbólico salvo constantes, por lo que podemos despejar $y$ obteniendo la familia de catenarias

$$y = C_1 \cosh\left(\frac{x - C_2}{C_1}\right) \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad C_1 > 0.$$

El valor de las constantes puede tratar de obtenerse a partir de las condiciones de frontera, aunque dependiendo de estos valores existirán una, dos o ninguna catenaria que las verifique (ver [16] para más detalles). En este caso, la función a integrar tampoco es convexa, así que no podemos aplicar la condición suficiente del Teorema 1.3.5. Sólo podemos afirmar que dados dos puntos del plano, la única superficie de revolución que puede tener área mínima y que pasa por esos puntos es la generada al rotar la catenaria, es decir, el catenoide.

## Problema de la línea más corta que une dos puntos

Este problema consiste en minimizar la longitud de la curva que une los puntos $(a, y_a)$ y $(b, y_b)$ dada por el funcional

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Puesto que la función $f$ a integrar sólo depende de $y'$, la ecuación de Euler es

$$f_{y'y'} y'' = \frac{1}{\left(1 + (y')^2\right)^{3/2}} y'' = 0,$$

de donde concluimos que $y'' = 0$ porque $f_{y'y'} \neq 0$. Por lo tanto, los extremales son rectas $y = C_1 x + C_2$, cuyas constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ pueden ajustarse usando las condiciones de frontera $y(a) = y_a$ e $y(b) = y_b$. Además, la recta resultante es un mínimo global del problema porque, como $f$ es una función convexa, podemos aplicar la condición suficiente del Teorema 1.3.5. La convexidad de la función se deduce de la Proposición 1.3.4.