Capítulo 1

CÁLCULO DE VARIACIONES

§1. Introducción.

Consideremos los siguientes dos problemas.

Problema 1. Sean P y Q dos puntos en el plano cartesiano. Se requiere encontrar la curva que va de P a Q y que tenga la longitud mínima. Esto es, se requiere

$$\text{minimizar} \int_a^b \sqrt{1+(\dot{y})^2}\, dx$$

en donde $y = y(x)$, $\dot{y} = dy/dx$ y además

$$P = \big(a, y(a)\big) \qquad \text{y} \qquad Q = \big(b, y(b)\big). \;\square$$

Problema 2. Supongamos que P yace en la parte superior del plano cartesiano y que Q yace en el eje horizontal. Considere la curva que va de P a Q dada por $y = y(x)$. Sea g la constante gravitacional. Si una canica de masa igual a m se desplaza a lo largo de esta curva bajo la acción de la gravedad, entonces la energía cinética es igual a la energía potencial, y por lo tanto

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy.$$

Se cumple entonces que

$$\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{2gy} \qquad \text{en donde} \qquad ds = \sqrt{1+(\dot{y})^2}\, dx.$$

Se requiere encontrar la curva $y = y(x)$ de descenso más rápido, esto es, se requiere

$$\text{minimizar} \int_a^b \frac{\sqrt{1+(\dot{y})^2}}{\sqrt{y}}\, dx.$$

La curva de descenso más rápido de denomina “braquistocroma”. □

§2. La ecuación de Euler.

En los dos problemas del apartado §1, se requiere hallar una función $y = y(x)$ que haga mínina una integral de la forma

$$(\mathbf{3}) \qquad I(y) \;=\; \int_a^b F(x, y, \dot{y})\, dx.$$

Para hacer énfasis en que el dominio de $I(y)$ es un espacio de funciones, se dice que $I(y)$ es una funcional. Con más precisión, se debe especificar siempre cuál es el espacio de funciones en donde opera la funcional I. En los Problemas 1 y 2 anteriores, se puede tomar como dominio de la funcional, el siguiente espacio de funciones con dos derivadas continuas

$$(\mathbf{4}) \qquad \mathcal{D} \;=\; \big\{ y \in \mathrm{C}^2[a,b] \;:\; P = \big(a, y(a)\big),\; Q = \big(b, y(b)\big) \big\}$$

en donde P y Q son puntos fijos del plano cartesiano.

Para encontrar una condición necesaria para un óptimo de $I(y)$ el siguiente resultado es útil. El siguiente se llama “lema fundamental del cálculo de variaciones”.

Lema 5. *Sea* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *una función continua. Supongamos que para toda función* $\eta : [a,b] \to \mathbf{R}$*, con derivada* $\dot{\eta}$ *continua y tal que*

$\eta(a) = 0 = \eta(b)$, se cumple que $\int_a^b \eta(x)\, f(x)\, dx = 0$. Entonces $f(x) = 0$ para cada $x \in [a, b]$.

Demostración. Supongamos lo contrario. Entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que $f(\xi) \neq 0$. Se puede suponer que $f(\xi) > 0$. Puesto que f es continua, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que

$$|x - \xi| < 2\epsilon \qquad \text{implica} \qquad \frac{1}{2} f(\xi) \;\leq\; f(x).$$

Sea $\eta(x)$ una función con derivada continua y no negativa tal que $\eta(x) = 0$ para cada $x \in [a, b] \setminus (\xi - 2\epsilon,\, \xi + 2\epsilon)$. Podemos suponer también que

$$\eta(x) = 1 \qquad \text{para cada} \qquad x \in (\xi - \epsilon, \xi + \epsilon).$$

Entonces tenemos

$$\int\limits_a^b \eta(x)\, f(x)\, dx \;\geq\; \int\limits_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} f(x)\, dx \;\geq\; \epsilon f(\xi) \;>\; 0.$$

Esto es una contradicción. ∎

La ecuación (7) que sigue se llama la "ecuación de Euler".

Teorema 6. *Sea $I(y)$ como en (3). Sea $\mathcal{D}$ como en (4). Si $I(y) = \inf \big\{ I(z) \;:\; z \in \mathcal{D} \big\}$ y además $y \in \mathcal{D}$, entonces*

$$F_2 - \frac{dF_3}{dx} \;=\; 0. \tag{7}$$

Es frecuente escribir la ecuación (7) como

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\Big) \;=\; 0.$$

Demostración del Teorema 6. Supongamos que y es tal que $I(y) = \inf\big\{I(z) : z \in \mathcal{D}\big\}$. Sea $\eta(x)$ una función suficientemente suave y tal que $\eta(a) = 0 = \eta(b)$. Sea α un número real. Sea

$$z(x) \;=\; y(x) + \alpha\eta(x).$$

Entonces $z \in \mathcal{D}$. Consideremos ahora la función $H : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definida mediante

$$\begin{aligned} H(\alpha) \;&=\; \int_a^b F(x, z, \dot{z})\, dx \\ &=\; \int_a^b F\big(x,\; y(x) + \alpha\eta(x),\; \dot{y}(x) + \alpha\dot{\eta}(x)\big)\, dx. \end{aligned}$$

Puesto que $I(y) = \inf\big\{I(z) : z \in \mathcal{D}\big\}$, entonces $H(\alpha)$ alcanza un extremo en $\alpha = 0$. Por lo tanto

$$\dot{H}(0) = 0.$$

Calculando la derivada dentro de la integral, se obiene

$$\dot{H}(\alpha) \;=\; \int_a^b \frac{\partial}{\partial\alpha} F(x, z, \dot{z})\, dx.$$

Por otra parte,

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha} \;=\; F_1\frac{dx}{d\alpha} + F_2\frac{dz}{d\alpha} + F_3\frac{d\dot{z}}{d\alpha} \;=\; F_2\eta + F_3\dot{\eta}.$$

Por lo tanto,

$$\dot{H}(0) \;=\; \int_a^b \Big\{F_2(x)\eta(x) + F_3(x)\dot{\eta}(x)\Big\}\, dx \;=\; 0.$$

Integrando por partes, se obtiene que

$$\int_a^b F_3(x)\dot{\eta}(x)\,dx \;=\; \underbrace{\eta(x)F_3(x)\Big|_a^b}_{\text{es igual cero}} - \int_a^b \eta(x)\,\frac{d}{dx}F_3(x)\,dx.$$

El término integrado es igual a cero, ya que $\eta(a) = 0 = \eta(b)$. Se cumple entonces que

$$\int_a^b \eta(x)\Big\{F_2 - \frac{d}{dx}F_3\Big\}\,dx \;=\; 0.$$

El teorema se sigue ahora del Lema 5. ∎

§3. Casos especiales.

En esta sección consideramos algunos casos del problema de optimizar la funcional

$$I(y) \;=\; \int_a^b F(x,y,\dot{y})\,dx.$$

cuando F es de una forma especial.

Puesto que

$$\frac{dF_3}{dx} \;=\; F_{31} + F_{32}\frac{dy}{dx} + F_{33}\frac{d^2y}{dx^2}$$

entonces la ecuación de Euler también se puede escribir como

$$F_{33}\,\frac{d^2y}{dx^2} + F_{32}\,\frac{dy}{dx} + \big(F_{31} - F_2\big) \;=\; 0. \tag{8}$$

Proposición 9. *Si F no depende de x ni de y, entonces la ecuación de Euler se reduce a*

$$F_{33}\,\frac{d^2y}{dx^2} \;=\; 0.$$

Ejemplo 10. Resolvamos el Problema 1. En este caso $F = \sqrt{1+(\dot{y})^2}$ no depende ni de x ni de y. Además

$$F_{33} \;=\; \left\{\frac{1}{1+(\dot{y})^2}\right\}^{\frac{3}{2}} \;\neq\; 0.$$

Por lo tanto, se cumple que

$$\frac{d^2y}{dx^2} \;=\; 0 \qquad \text{y entonces} \qquad y \;=\; c_1 + c_2 x$$

para algunas constantes c_1 y c_2. □

Proposición 11. *Si F no depende de y, entonces la ecuación de Euler se reduce a*

$$F_3 \;=\; \text{constante.}$$

Demostración. En efecto,

$$0 \;=\; F_2 - \frac{dF_3}{dx} \;=\; -\frac{dF_3}{dx}. \;\blacksquare$$

Ejemplo 12. Entre las curvas que unen los puntos $P = (1,3)$ y $Q = (2,5)$ hallar la curva en la cual

$$\int_1^2 \dot{y}(1 + x^2\dot{y})\,dx$$

alcanza un extremo.

En este caso, F no depende de y y por lo tanto

$$F_3 = \text{constante} \qquad \text{o bien} \qquad 1 + 2x^2\dot{y} \;=\; c.$$

La solución de la ecuación diferencial

$$\dot{y} \;=\; \frac{c-1}{2x^2} \qquad \text{es} \qquad y \;=\; \frac{c_1}{x} + c_2.$$

La extremal buscada es $y = 7 - \dfrac{4}{x}$. □

Proposición 13. *Si F no depende de x, entonces la ecuación de Euler se reduce a*

$$F_3\frac{dy}{dx} - F \;=\; \text{constante}.$$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\Big(F_3\frac{dy}{dx} - F\Big) \;&=\; \frac{dF_3}{dx}\frac{dy}{dx} + F_3\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dF}{dx} \\
&=\; \frac{dF_3}{dx}\frac{dy}{dx} + F_3\frac{d^2y}{dx^2} - \Big(F_1 + F_2\frac{dy}{dx} + F_3\frac{d^2y}{dx^2}\Big) \\
&=\; \dot{y}\left[\frac{dF_3}{dx} - F_2\right] - F_1 \;=\; 0
\end{aligned}$$

ya que la expresión entre paréntesis es igual a cero por la ecuación de Euler y además $F_1 = 0$ por hipótesis. ∎

Ejemplo 14. He aquí la solución del Problema 2. Para este caso tenemos

$$F(x, y, \dot{y}) \;=\; \frac{\sqrt{1 + (\dot{y})^2}}{\sqrt{y}}.$$

Por la Proposición 13, se cumple que

$$\frac{(\dot{y})^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+(\dot{y})^2}} - \frac{\sqrt{1+(\dot{y})^2}}{\sqrt{y}} \;=\; \text{constante.}$$

Esto último se reduce a

$$y\big(1+(\dot{y})^2\big) \;=\; c.$$

Es una tarea fácil verificar que para cualesquiera a, b y θ, la siguiente es una solución de esta ecuación diferencial

$$x \;=\; a + b\big\{t - \cos(t+\theta)\big\} \qquad \text{y} \qquad y \;=\; b\big\{1 + \operatorname{sen}(t+\theta)\big\}.$$

En efecto, escribiendo S en lugar de $\operatorname{sen}(t+\theta)$ y además C en lugar de $\cos(t+\theta)$, se cumple que

$$1 + \big(\frac{dy}{dx}\big)^2 \;=\; 1 + \Big(\frac{C}{1+S}\Big)^2 \;=\; \frac{2}{1+S} \;=\; \frac{2b}{y}. \;\square$$

Ejemplo 15. Consideremos el problema de determinar el consumo que maximiza la utilidad descontada total sobre un periodo de tiempo T, es decir, queremos

$$(\mathbf{16}) \qquad \text{maximizar} \int_0^T e^{-\delta t}\, U\big\{c(t)\big\}\, dt$$

en donde $c(t)$ es la cantidad consumida al tiempo t. Mediante $U(c)$ se denota la utilidad debida al consumo c. Suponemos que U es creciente y cóncava, de manera que

$$\frac{dU}{dc} > 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2U}{dc^2} < 0.$$

La utilidad futura se descuenta a una tasa δ. Para un consumidor impaciente, δ es grande.

El suponer que $U(c)$ es una función creciente, es debido a que un mayor consumo produce una mayor utilidad (o satisfacción). El suponer que $U(c)$ es concava es debido a que el consumo de las primeras unidades (de helado, por ejemplo) produce un utilidad mayor que el consumo de las últimas unidades. Esta es la ley de los rendimientos decrecientes.

Si $K = K(t)$ es el capital, entonces

$$\dot{K}(t) \;=\; rK(t) + I(t) - c(t) \tag{17}$$

en donde $I = I(t)$ es el ingreso determinado de manera exógena. El capital gana intereses a razón de r. Pedimos además que

$$K(0) = K_0 \qquad \text{y} \qquad K(T) = K_T.$$

Se puede usar la ecuación (17) para eliminar c de (16), y así queremos

$$\text{maximizar} \int_0^T e^{-\delta t}\, U\big(rK + I - \dot{K}\big)\, dt.$$

Sea $F(t, K, \dot{K}) = e^{-\delta t} U(rK + I - \dot{K})$. Entonces

$$F_2 = re^{-\delta t}\dot{U}(c) \qquad \text{y} \qquad F_3 = -e^{-\delta t}\dot{U}(c).$$

La ecuación de Euler

$$F_2 \;=\; \frac{d}{dt}F_3 \qquad \text{implica} \qquad -\frac{\ddot{U}}{\dot{U}}\,\dot{c} \;=\; r - \delta.$$

Por hipótesis se cumple que $-\ddot{U}/\dot{U} > 0$. Por lo tanto

$$\frac{dc}{dt} > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad r > \delta.$$

Supongamos ahora que $U(c) = \log c$ y también que $I(t) = 0$ para cada $0 \le t \le T$. Supongamos además que $K_T = 0$. Entonces

$$\frac{\dot{c}}{c} = r - \delta \qquad \text{o bien} \qquad \dot{K} - rK = -c(0)e^{(r-\delta)t}.$$

Multiplicando por e^{-rt}, integrando y usando $K(0) = K_0$ y $K(T) = 0$, se obtiene que

$$K(t) \;=\; e^{rt}K_0\Big\{1 - \frac{1 - e^{-\delta t}}{1 - e^{-\delta T}}\Big\} \qquad \text{o bien} \qquad c(t) \;=\; \delta K_0 \frac{e^{(r-\delta)t}}{1 - e^{-\delta T}}. \; \Box$$

§4. Condición de segundo orden.

En esta sección se obtiene una condición necesaria para que un extremo sea un máximo.

Teorema 18. (Legendre). *Si* $\int_a^b F(x, y, \dot{y})\, dx$ *es máximo en* $y = y^*$, *entonces*

$$F_{33}\big(x,\, y^*(x),\, y^*(x)\big) \;\le\; 0 \quad \textit{para cada} \quad x \in [a, b].$$

Demostración. Sea $\eta\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ una función tal que $\eta(a) = 0 = \eta(b)$. Sea

$$g(\alpha) \;=\; \int_a^b F(t,\, y + \alpha\eta,\, \dot{y} + \alpha\dot{\eta})\, dx.$$

Supongamos que $g(\alpha)$ alcanza un máximo en $\alpha = 0$. Entonces se cumple que $\ddot{g}(0) < 0$. Ahora bien,

$$\ddot{g}(0) \;=\; \int\limits_a^b \Big\{ F_{22}\eta^2 + 2F_{23}\eta\dot{\eta} + F_{33}(\dot{\eta})^2 \Big\}\, dx.$$

Por otra parte,

$$2\int\limits_a^b F_{23}\eta\dot{\eta}\, dx \;=\; \underbrace{\eta^2 F_{23}\Big|_a^b}_{\text{igual a 0}} - \int\limits_a^b \eta^2 \frac{d}{dx} F_{23}\, dx.$$

Por lo tanto

$$\ddot{g}(0) \;=\; \int\limits_a^b \Big\{ \eta^2 \Big(F_{22} - \frac{d}{dx}F_{23} \Big) + (\dot{\eta})^2 F_{33} \Big\}\, dx.$$

El teorema se sigue ahora del Lema 19 que aparece a continuación. ∎

Lema 19. *Sean f y g funciones continuas tales que*

$$\int\limits_a^b \Big\{ f(x)\dot{\eta}^2(x) + g(x)\eta^2(x) \Big\}\, dx \;\leq\; 0$$

para cada función η. Entonces $f(x) \leq 0$ para cada $x \in [a,b]$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $0 \in (a,b)$ es tal que $f(0) \geq 2$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq 1$ para cada $|x| < \delta$. Sea

$$\eta(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{x}{\delta} + 1 & \text{si } -\dfrac{1}{\delta} \leq x \leq 0, \\[2ex] -\dfrac{x}{\delta} + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq -\dfrac{1}{\delta}, \\[2ex] 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para esta elección de η, cuando $\delta \to 0$, tenemos que

$$-\int_a^b g\eta^2\,dx \;\geq\; \int_{-\delta}^{+\delta} f\dot{\eta}^2\,dx \;\geq\; \int_{-\delta}^{+\delta} \Big(\frac{1}{\delta}\Big)^2\,dx \;=\; \frac{2}{\delta} \;\to \infty. \;\blacksquare$$

Ejemplo 20. Se requiere optimizar

$$-\int_0^1 (\dot{y})^2\,dx \qquad \text{con} \qquad y(0) = 0 \quad \text{y} \quad y(1) = 1.$$

En este caso $F_{33} = -2 < 0$. Por la proposición 9, sabemos que $y = x$ es la solución que hace que $-\int_0^1 (\dot{y})^2\,dx$ tenga un extremo. Por el Teorema 18, sabemos que este extremo es un máximo. $\square$

§5. Ejercicios.

Hallar las extremales de las siguientes funcionales.

Ejercicio 21. $I(y) = \int_0^1 (x + (\dot{y})^2)\,dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$

Ejercicio 22. $I(y) = \int_0^1 (y^2 + (\dot{y})^2)\,dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$

Respuesta. $y = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\operatorname{senh} x}.$

Ejercicio 23. $I(y) = \int_a^b (x\dot{y} + (\dot{y})^2)\,dx.$

Respuesta. $y = c_1 + c_2 x - \dfrac{x^2}{4}.$

Ejercicio 24. Sea $\mathcal{D} = \big\{ y \in \mathrm{C}^2[0, \pi/2] \,:\, y(0) = 1,\, y(\pi/2) = 1 \big\}$. Para cada, $y \in \mathcal{D}$ sea

$$(\mathbf{25}) \qquad I(y) \;=\; \int_0^{\pi/2} \big(y^2 - (\dot{y})^2 \big)\, dx.$$

Muestre que $I(y)$ alcanza un óptimo igual a 2 en $y^*(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$, esto es, muestre que $I(y^*) = 2$. Ahora considere la funcional $I(y)$ definida en (25), en donde y es una función de la forma

$$y(x) \;=\; 1 + \alpha x - \frac{2\alpha}{\pi} x^2 \qquad \text{con} \qquad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Muestre que en este caso, el óptimo es igual a

$$\frac{\pi(-240 + \pi^2)}{12(-40 + \pi^2)} \;=\; 1.99957536 \cdots .$$

Ejercicio 26. Sea $\mathcal{D} = \big\{ y \in \mathrm{C}^2[0, \pi/2] \,:\, y(1) = 0,\ y(2) = 3 \big\}$. Para cada, $y \in \mathcal{D}$ sea

$$(\mathbf{27}) \qquad I(y) \;=\; \int_1^{2} (\dot{y})^2\, x^3\, dx.$$

Muestre que $I(y)$ alcanza un óptimo igual a 24 en $y^*(x) = 4 - (4/x^2)$, esto es, muestre que $I(y^*) = 24$. Ahora considere la funcional $I(y)$ definida en (27), en donde y es una función de la forma

$$y(x) \;=\; 2\alpha - 3 + (3 - 3\alpha)x + \alpha x^2 \qquad \text{con} \qquad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Muestre que en este caso, el óptimo es igual a 24.9333.

Por último, considere la funcional $I(y)$ definida en (27), en donde y es una función de la forma

$$y(x) = 2\alpha + 6\beta - 3 + (3 - 3\alpha - 7\beta)x + \alpha x^2 + \beta x^3 \qquad \text{con} \qquad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

Muestre que en este caso, el óptimo es igual a 24.0766.

Ejercicio 28. Sea $F(x, y) = y + x\dot{y}$. Muestre que $\int_a^b F(x, y)\ dx$ no depende de $y = y(x)$. Por lo tanto, el problema de optimizar $\int_a^b F(x, y)\ dx$ no tiene sentido.

Capítulo 2
MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

§1. Introducción.

La técnica de los multiplicadores de Lagrange es una herramienta útil en la solución de problemas de optimización bajo restricciones. La técnica de los multiplicadores fue aplicada por primera vez por Lagrange, a problemas del cálculo de variaciones, en su tratado de *Mecánica Analítica* de 1788.

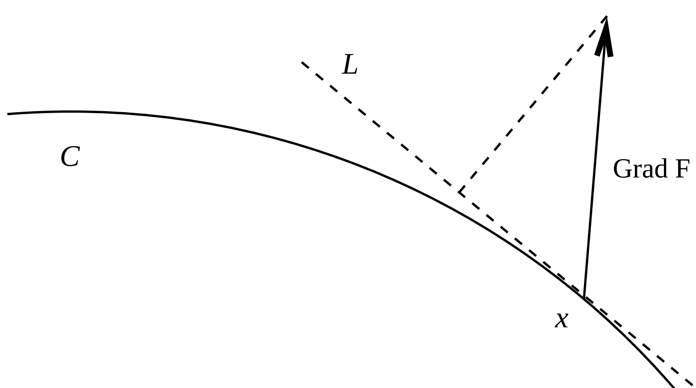

Figura 1.

Supongamos que queremos maximizar $F(x)$ sujeto a la restricción $R(x) = r_0$. La restricción $R(x) = r_0$ define una curva C, ver Figura 1. El gradiente Grad F es la dirección a lo largo de la cual F se incrementa lo más rápido posible. Si la proyección de Grad F sobre la tangente L a la curva C en el punto x no es nula, entonces el valor de F se puede incrementar si nos movemos a lo largo de C en la dirección indicada por la proyección de Grad F sobre la tangente L. Como L es perpendicular a Grad R, entonces existe λ tal que

$$F(x^*) = \sup\left\{F(x) : R(x) = r_0\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{Grad } F(x^*) = \lambda \text{Grad } R(x^*).$$

§2. La variación de Gâteaux.

En esta sección y en todo lo que sigue, mediante $\mathcal{X}$ se denota un espacio vectorial normado. El caso más interesante para nosotros, es cuando $\mathcal{X}$ es de dimensión infinita.

La siguiente definición es por completo análoga a la definición de derivada direccional del cálculo diferencial en $\mathbf{R}^n$. Ver por ejemplo, *Análisis Matemático* de T. Apostol, Capítulo 12.

Definición 1. Sea $J : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ una funcional definida en un espacio lineal $\mathcal{X}$. Sean y y η elementos de $\mathcal{X}$. La expresión

$$\mathrm{G}[J]^y_\eta \;=\; \frac{d}{d\epsilon} J(y+\epsilon\eta)\Big|_{\epsilon=0}$$

se llama la variación de Gâteaux de J evaluada en y y con respecto de η. □

Ejemplo 2. Calcular la variación de $F(y) = \int_a^b \{y(x)\}^2 \, dx$. Primero,

$$F(y+\epsilon\eta) \;=\; \int_a^b \left\{y^2 + 2\epsilon y\eta + \epsilon^2\eta^2\right\} dx.$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{d\epsilon} F(y+\epsilon\eta) \;=\; 2\int_a^b y(x)\eta(x)\, dx + 2\epsilon \int_a^b \eta^2(x)\, dx.$$

Haciendo que $\epsilon = 0$, vemos que $\mathrm{G}[F]^y_\eta = 2\int_a^b y(x)\eta(x)\, dx$. □

La demostración del siguiente resultado es fácil y se sugiere que el lector la intente a modo de ejercicio por sí mismo.

Teorema 3. *Sea $J : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ una funcional definida en un espacio lineal $\mathcal{X}$. Suponga que $y^* \in \mathcal{X}$ es un extremo local de J. Entonces*

$$\mathrm{G}[J]_\eta^{y^*} = 0 \quad \textit{para cada} \quad \eta \in \mathcal{X}.$$

Demostración. Supongamos que existe $\eta \in \mathcal{X}$ tal que $\alpha := \mathrm{G}[J]_\eta^{y^*}$ no se anula. Suponemos sin perder generalidad, que $\alpha > 0$. Entonces

$$J(y^* + \epsilon\eta) - J(y^*) = \alpha\epsilon + o(\epsilon)$$

en donde $\dfrac{o(\epsilon)}{\epsilon} \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$. Nótese ahora que

$$\begin{aligned} \exists\, \epsilon < 0 : \alpha\epsilon + o(\epsilon) < 0 \qquad &\Rightarrow \qquad J(y^* + \epsilon\eta) < J(y^*), \\ \exists\, \epsilon > 0 : \alpha\epsilon + o(\epsilon) > 0 \qquad &\Rightarrow \qquad J(y^* + \epsilon\eta) > J(y^*). \end{aligned}$$

Por lo tanto $J(y^*)$ no es mínimo y no es máximo. ∎

En la demostración del Teorema 6, Capítulo 1, se probó que

$$\mathrm{G}[I]_\eta^y = \int_a^b \eta(x)\left\{F_2 - \frac{d}{dx}F_3\right\} dx.$$

El Teorema 3 anterior, implica que $\mathrm{G}[I]_\eta^y = 0$, para cada $\eta \in \mathcal{X}$, es una condición necesaria para que y sea un extremo.

Para la discución en torno al Teorema de los Multiplicadores de Lagrange, la siguiente definición es necesaria.

Definición 4. Sea F una funcional con variación $\mathrm{G}[J]$, definida en un conjunto abierto $\mathcal{D}$ de un espacio vectorial normado $\mathcal{X}$. Se dice que la la variación $\mathrm{G}[J]$ es debilmente continua en $x \in \mathcal{D}$, si para toda $\eta \in \mathcal{X}$ se cumple que

$$\lim_{y\to x} \mathrm{G}[J]^y_\eta \;=\; \mathrm{G}[J]^x_\eta.$$

Con más precisión, se requiere que para toda $\eta \in \mathcal{X}$

$$\mathrm{G}[J]^y_\eta \;\to\; \mathrm{G}[J]^x_\eta \qquad \text{cuando} \qquad ||x-y|| \;\to\; 0$$

en donde $||\cdot||$ es la norma en $\mathcal{X}$. □

§3. Teorema de Lagrange.

Enunciamos a continuación el Teorema de la Función Inversa.

Teorema 5. *Sea $F\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ una función de la forma*

$$F(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\big) \quad \text{con} \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Suponga que las derivadas parciales $\partial f_i/\partial x_j$ existen y son continuas en una vecindad de x^0. Suponga que el Jacobiano de F no se anula en x^0, esto es, que

$$0 \;\neq\; \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\bigg|_{x^0}.$$

Entonces existe una vecindad abierta U de x^0 y una vecindad abierta V de $y^0 = F(x^0)$ tales que

$$F : U \to V$$

es biyectiva. Además, la función inversa $G = F^{-1}$ tiene una derivada continua.

Para dar una idea de la demostración, nótese que una función diferenciable $F\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ se deja aproximar muy bien por una función lineal. La función lineal en cuestión está representada por la matriz $(\partial f_i/\partial x_j)$. Una función lineal es invertible si y sólo si su determinante no es nulo. Para los detalles de la demostración, ver por ejemplo, *Análisis Matemático* de T. Apostol, Capítulo 13.

El Teorema 5 requiere que las derivadas parciales $\partial f_j/\partial x_j$ sean continuas en una vecindad del punto x_0. Para poder cumplir este requerimiento, pediremos que las variaciones de nuestras funcionales sean debilmente continuas. Ver la Definición 4.

Definición 6. Si $R\colon\mathcal{X}\to\mathbf{R}$ es una funcional, entonces escribiremos

$$\mathcal{D}[R=r] \;=\; \big\{x\in\mathcal{X}\;:\;R(x)=r\big\}.\ \square$$

El siguiente es el "Teorema de los Multiplicadores de Lagrange".

Teorema 7. (Lagrange). *Sean F y R funcionales definidos en un conjunto abierto $\mathcal{D}$ de un espacio vectorial normado $\mathcal{X}$. Sea $r_0\in\mathbf{R}$ un número real tal que $\mathcal{D}[R=r_0]\neq\emptyset$. Sea x^* un vector extremo local de F en el dominio $\mathcal{D}[R=r_0]$, de modo que*

$$F(x^*) \;=\; \sup\Big\{F(x)\;:\;x\in\mathcal{D}[R=r_0]\Big\}.$$

Suponga que las variaciones $\mathrm{G}[F]$ y $\mathrm{G}[R]$ son debilmente continuas en una vecindad de x^*. Entonces se cumple al menos una de las dos posibilidades siguientes

(a) $\mathrm{G}[R]_y^{x^*}=0$ *para cada* $y\in\mathcal{X}$.

(b) *Existe una constante λ tal que*

$$\mathrm{G}[F]_y^{x^*} \;=\; \lambda\mathrm{G}[R]_y^{x^*} \quad \text{para cada} \quad y\in\mathcal{X}.$$

Demostración. Probaremos que si y, z son elementos de $\mathcal{X}$ entonces

$$0 \;=\; \det \begin{pmatrix} \mathrm{G}[F]_y^{x^*} & \mathrm{G}[F]_z^{x^*} \\ \\ \mathrm{G}[R]_y^{x^*} & \mathrm{G}[R]_z^{x^*} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Si existe $w \in \mathcal{X}$ tal que $\mathrm{G}[R]_w^{x^*} \neq 0$, entonces (8) implica que **(b)** se cumple con

$$\lambda \;=\; \frac{\mathrm{G}[F]_w^{x^*}}{\mathrm{G}[R]_w^{x^*}}.$$

Para probar (8), sean y, z vectores fijos no cero en $\mathcal{X}$. Consideremos las funciones

$$\widetilde{F}(\alpha,\beta) \;=\; F(x^* + \alpha y + \beta z), \qquad \widetilde{R}(\alpha,\beta) \;=\; R(x^* + \alpha y + \beta z)$$

definidas en un disco $U \subset \mathbf{R}^2$ abierto con centro en el origen del plano cartesiano $\mathbf{R}^2$.

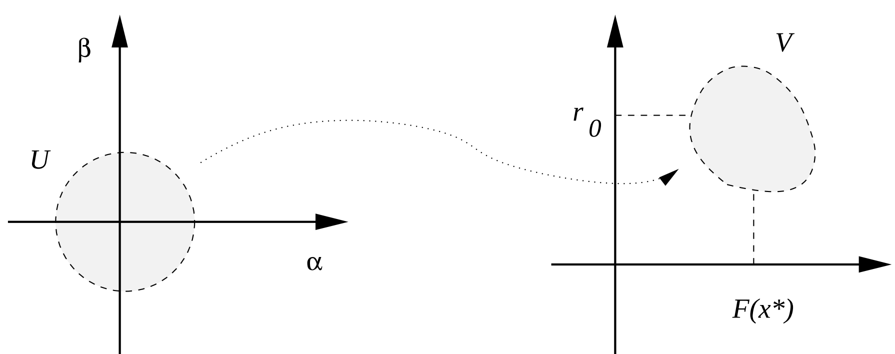

Figura 2.

Nos gustaría invertir el mapeo

$$(\alpha,\beta) \quad \mapsto \quad \big(\widetilde{F}(\alpha,\beta), \widetilde{R}(\alpha,\ \beta)\big) \tag{9}$$

en el punto

$$\big(\widetilde{F}(0,0), \widetilde{R}(0,0)\big) \;=\; \big(F(x^*), r_0\big).$$

Por el Teorema de la Función Inversa, es posible invertir el mapeo (9) en el caso de que

$$\textbf{(10)} \qquad 0 \;\neq\; \det \begin{pmatrix} \widetilde{F}_1 & \widetilde{F}_2 \\ \widetilde{R}_1 & \widetilde{R}_2 \end{pmatrix}$$

en donde las derivadas parciales en el determinante anterior se evaluan en $(\alpha, \beta) = (0, 0)$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} F_1(\alpha,\beta) \;&=\; \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\widetilde{F}(\alpha+\epsilon,\beta) - \widetilde{F}(\alpha-\beta)}{\epsilon} \\ &=\; \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\Big\{F(x^*+\alpha y+\beta z+\epsilon y) - F(x^*+\alpha y+\beta z)\Big\} \\ &=\; \mathrm{G}[F]_y^w \quad \text{en donde} \quad w = x^*+\alpha y+\beta z. \end{aligned}$$

Haciendo que $\alpha \to 0$ y $\beta \to 0$, se obtiene

$$F_1(0,0) \;=\; \mathrm{G}[F]_y^{x^*}.$$

Lo mismo vale para las otras derivadas parciales. Por lo tanto, si (8) no se cumple, entonces (10) sí se cumple. En este caso existe el mapeo inverso a (9). Consideremos ahora el segmento de linea recta horizontal que pasa por el punto $(F(x^*), r_0)$. Ahora es claro que x^* no es un vector que optimiza la funcional F, ya que existen valores de α y β tales que

$$F(x^*) \;<\; F(x^*+\alpha x+\beta y). \;\blacksquare$$

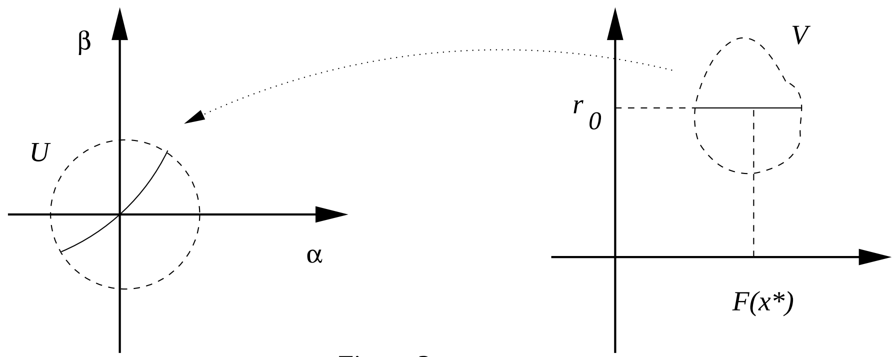

Figura 3.

§4. Política de consumo óptimo.

Consideremos el caso de una persona con un ingreso conocido $I = I(t)$. El problema es determinar la proporción del ingreso destinada al consumo y la proporción destinada al ahorro. Se requiere que la política de consumo maximice la utilidad total.

Mediante $S = S(t)$ se denota el volumen de la cuenta bancaria. Mediante $c = c(t)$ el consumo al tiempo t. La ecuación que rige la dinámica del problema es

$$\dot{S} = I + \alpha S - c \tag{11}$$

en donde α es la tasa de interés bancaria. Resolviendo la ecuación diferencial (11), obtenemos

$$S(t) \;=\; e^{\alpha t} S_0 + e^{\alpha t} \int\limits_0^t e^{-\alpha \xi} \big\{ I(\xi) - c(\xi) \big\} \, d\xi \tag{12}$$

en donde S_0 son los ahorros iniciales.

Denotaremos mediante $S(T) = S_T$ los ahorros finales deseados. Aquí T es el tiempo final del ejercicio.

Rearreglando la ecuación (12), tenemos

$$R(c) = r_0 \tag{13}$$

en donde

$$R(c) \;=\; \int_0^T e^{-\alpha t} c(t)\, dt, \tag{14}$$

$$r_0 \;=\; S_0 - e^{-\alpha T} S_T + \int_0^T e^{-\alpha t} I(t)\, dt. \tag{15}$$

De esta manera se ha reescrito la condición diferencial (11) de una manera más conveniente para aplicar el Teorema de los Multiplicadores de Lagrange.

Como medida de la utilidad causada por la política de consumo c, proponemos

$$J(c) \;=\; \int_0^T F\big(t, c(t)\big)\, dt$$

en donde F es una función creciente con respecto al argumento $c(t)$, de modo que un mayor consumo provoque una mayor utilidad. Además, F debe ser una función concava con respecto al argumento $c(t)$. Esto es por la ley de los rendimientos decrecientes. Para fijar ideas, supondremos que

$$F(t, c) \;=\; e^{-\beta t} \log(1 + c)$$

en donde β es la tasa de inflación.

Como dominio de las funcionales R y J tomamos

$$\mathcal{D} \;=\; \Big\{ c \in \mathrm{C}[0,T] \;:\; c(t) > 0 \;\text{ para cada }\; t \in [0,T] \Big\}.$$

En el espacio vectorial $\mathrm{C}[0,T]$ se toma la norma uniforme

$$||c|| \;=\; \max_{0 \le t \le T} |c(t)|.$$

Puesto

$$\frac{d}{d\epsilon} \int_0^T e^{-\beta t} \log \big\{ 1 + c(t) + \epsilon \eta(t) \big\} \, dt \;=\; \int_0^T e^{-\beta t} \frac{\eta(t)}{1 + c(t) + \epsilon \eta(t)} \, dt$$

entonces

$$\mathrm{G}[J]^c_\eta \;=\; \int_0^T e^{-\beta t} \frac{\eta(t)}{1 + c(t)} \, dt.$$

De manera similar, se ve que

$$\mathrm{G}[R]^c_\eta \;=\; \int_0^T e^{-\alpha t} \eta(t) \, dt.$$

La desigualdad

$$\Big| \int_0^T \frac{e^{-\beta t}}{1 + c} \eta \, dt - \int_0^T \frac{e^{-\beta t}}{1 + c_1} \eta \, dt \Big| \;\le\; ||c - c_1|| \frac{1}{\beta} \max_{0 \le t \le T} |\eta(t)|$$

muestra que la variación $\mathrm{G}[J]^c_\eta$ es debilmente continua. De manera similar se prueba que $\mathrm{G}[R]^c_\eta$ es debilmente continua. Tomando $\eta(t) = 1$ para cada $t \in [0,T]$, se tiene que

$$\mathrm{G}[R]^c_\eta \;=\; \int_0^T e^{-\alpha t} \, dt \;>\; 0.$$

Por lo tanto, la primera opción del Teorema de los Multiplicadores de Lagrange no se cumple para toda η. Por lo tanto, existe una constante λ tal que si $c^* \in \mathcal{D}[R = r_0]$ maximiza $J(c)$, entonces $\mathrm{G}[J]_\eta^{c^*} = \lambda \mathrm{G}[R]_\eta^{c^*}$ para cada $\eta \in \mathrm{C}[0,T]$. Por lo tanto

$$\int_0^T \Big\{ \frac{e^{-\beta t}}{1 + c^*(t)} - \lambda e^{-\alpha t} \Big\} \eta(t)\, dt \;=\; 0.$$

Puesto que el inegrando debe ser igual a cero, entonces

$$c^*(t) \;=\; -1 + \frac{1}{\lambda} \exp \big\{ (\alpha - \beta) t \big\}.$$

Sustituyendo c^* en la condición $R(c^*) = r_0$, se obtiene

$$\frac{1}{\lambda} \;=\; \Bigg\{ S_0 - e^{-\alpha T} S_T + \int_0^T e^{-\alpha t} I(t)\, dt + \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha} \Bigg\} \Big(\frac{\beta}{1 - e^{-\beta T}} \Big).$$

Por lo tanto

$$c^*(t) \;=\; -1 + \Big[r_0 + \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha} \Big] \Big(\frac{\beta}{1 - e^{-\beta T}} \Big) e^{(\alpha - \beta) t} \tag{16}$$

es la expresión para el consumo óptimo, en donde r_0 es como en (15).

Ejercicio 17. Pruebe que $\dfrac{\partial J}{\partial r_0}(c^*) = \lambda$.

§5. Problema isoperimétrico.

El problema isoperimétrico tratado en esta sección, nos permite dar una interpretación económica de multiplicador λ de Lagrange.

Definición 18. Consideremos las dos funcionales

$$J(y) \;=\; \int_a^b F(x,y,\dot{y})\,dx \qquad \text{y} \qquad R(y) \;=\; \int_a^b G(x,y,\dot{y})\,dx.$$

Sea B una constante. Un problema isoperimétrico consiste en

$$\text{maximizar } J(y) \qquad \text{sujeto a} \qquad R(y) = B. \;\square$$

En un problema isoperimétrico, podemos proceder como en la demostración del Teorema 6 del Capítulo 1, y así ver que

$$\mathrm{G}[J]^y_\eta \;=\; \int_a^b \eta(x)\Big\{F_2 - \frac{d}{dx}F_3\Big\}\,dx,$$

$$\mathrm{G}[R]^y_\eta \;=\; \int_a^b \eta(x)\Big\{G_2 - \frac{d}{dx}G_3\Big\}\,dx.$$

Por el Teorema de Lagrange, vemos que debe existir una constante λ tal que para toda η, se cumple que

$$\int_a^b \eta(x)\Big[\Big(F_2 - \frac{d}{dx}F_3\Big) - \lambda\Big(G_2 - \frac{d}{dx}G_3\Big)\Big]\,dx \;=\; 0.$$

Por lo tanto, debe cumplirse que

$$\textbf{(19)} \qquad \big(F_2 - \lambda G_2\big) - \frac{d}{dx}\big(F_3 - \lambda G_3\big) \;=\; 0.$$

Teorema 20. *Sea y^* la solución del problema isoperimétrico y sea*

$$V \;=\; \int_a^b F(x,y^*,\dot{y}^*)\,dx$$

el valor de la funcional. Entonces

$$\left.\frac{dV}{dB}\right|_{y^*} = \lambda.$$

Así pues, λ representa la ganancia contribuida por una unidad marginal (i.e., una unidad adicional) del recurso.

Demostración. Escribiremos y en lugar de y^*. Primero nótese que

$$V(B) = \int_a^b \Big\{ F(x, y, \dot{y}) - \lambda G(x, y, \dot{y}) \Big\}\, dx + \lambda B.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dB} &= \int_a^b \Big\{ F_2 \frac{\partial y}{\partial B} + F_3 \frac{\partial \dot{y}}{\partial B} - \lambda G_2 \frac{\partial y}{\partial B} - \lambda G_3 \frac{\partial \dot{y}}{\partial B} \Big\}\, dx + \lambda \\
&= \int_a^b \Big\{ \big(F_2 - \lambda G_2\big) \frac{\partial y}{\partial B} + \big(F_3 - \lambda G_3\big) \frac{\partial \dot{y}}{\partial B} \Big\}\, dx + \lambda.
\end{aligned}$$

Puesto que $y(a, B) = 0 = y(b, B)$ para cada B, entonces

$$\frac{dV}{dB} - \lambda = \int_a^b \Big\{ \big(F_2 - \lambda G_2\big) - \frac{d}{dx}\big(F_3 - \lambda G_3\big) \Big\} \frac{\partial y}{\partial B}\, dx.$$

Ahora sólo basta observar que (19), implica que la expresión entre llaves que multiplica a $\partial y / \partial B$, es identicamente cero. ∎

Capítulo 3

PRINCIPIO DEL MÁXIMO DE PONTRYAGIN

§1. Formulación del principio.

En este capítulo consideramos el importante Principio del Máximo de Pontryagin para la solución de problemas de control óptimo. Antes de formular el Pricipio del Máximo, consideramos un ejemplo muy simple de problema de control óptimo.

Ejemplo 1. Supongamos que el crecimiento de una planta se puede acelerar mediante una luz artificial. Sea $x(t)$ la altura de la planta al tiempo t. Entonces

$$\frac{dx}{dt} = 1 + u \tag{2}$$

en donde $u = u(t)$ es el exceso de la tasa de crecimiento debido a la luz artificial. Supondremos también que

$$x(0) = 0 \qquad \text{y que} \qquad x(1) = 2. \tag{3}$$

Sea

$$J = \int_0^1 \frac{1}{2} u^2 \, dt$$

el costo total debido a la luz artificial.

El problema es minimizar J sujeto a las condiciones (2) y (3). La solución de (2) que satisface la primera condición de (3), es

$$x(t) = \int_0^t \big(1 + u(t)\big)\, dt.$$

La segunda condición en (3) implica que $\int_0^1 u(t)\,dt \;=\; 1$. Por lo tanto

$$J \;=\; \int_0^1 \frac{1}{2}\big[(u-1)^2 + 2u - 1\big]\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}(u-1)^2\,dt + \int_0^1 u(t)\,dt - \frac{1}{2} \;=\; \int_0^1 \frac{1}{2}(u-1)^2\,dt + \frac{1}{2}.$$

Vemos entonces que J toma a $1/2$ como valor mínimo y este mínimo se alcanza cuando $u(t) = 1$ para cada $t \in [0,1]$. □

Problema 4. En un problema de control óptimo, se requiere

$$\text{maximizar} \quad \int_0^T g\big(x(t), t, u(t)\big)\,dt \tag{5}$$

sujeto a las siguientes condiciones

$$\dot{x} \;=\; f(x,t,u), \qquad x(0) = x_0, \qquad x(T) = x_1, \qquad u \in \mathcal{U}. \tag{6}$$

Mediante $\mathcal{U}$ se denota el conjunto de controles admisibles que por definición es la clase de funciones reales continuas por pedazos $u(t)$ para cada $t \in [0,T]$, que satisfacen

$$u(t) \;\in\; U_t$$

en donde U_t es un intervalo, posiblemente infinito. □

Definición 7. El Hamiltoniano $\mathcal{H}$ asociado al Problema 4 es la función

$$\mathcal{H} \;=\; g + \lambda f$$

en donde $\lambda = \lambda(t)$ se llama la variable adjunta. □

Ahora podemos enunciar el Principio del Máximo de Pontryagin.

Teorema 8. (Pontryagin). *Si u^* resuelve el Problema 4, entonces se cumple que*

$$\dot{\lambda} \;=\; -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \qquad \text{y además} \qquad \mathcal{H}\big(u^*(t)\big) \;=\; \max_{u \in U_t} \mathcal{H}\big(u(t)\big)$$

para cada $t \in [0, T]$. En el caso de que $x(T)$ no esté restringida, entonces $\lambda(T) = 0$. Además $\mathcal{H}$ es constante a lo largo de la trayectoria óptima y esta constante es igual a 0 si T está libre.

La condición $\lambda(T) = 0$ se llama "condición de transversalidad".

Si $u(t)$ yace en el interior de U_t, entonces u hace máximo $\mathcal{H}$ si y sólo si

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \;=\; 0.$$

Ejemplo 9. Consideremos nuevamente el problema tratado en el Ejemplo 1. En este caso el Hamiltoniano es

$$\mathcal{H} \;=\; -\frac{1}{2}u^2 + \lambda(1+u).$$

Puesto que la variable adjunta λ satisface

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = 0 \qquad \text{entonces} \qquad \lambda = A$$

en donde A es una constante. Por otro lado, $\partial \mathcal{H}/\partial u = 0$ implica $u = \lambda$. Puesto que x satisface la condición (2) y puesto que u ya está determinada, entonces

$$\dot{x} \;=\; 1 + A.$$

La solución de esta ecuación que satisface las condiciones inicial y final (3), es

$$x = 2t \qquad \text{en donde} \qquad A = 1.$$

Por lo tanto, el control óptimo es $u(t) = 1$ para $t \in [0, 1]$. □

Ejemplo 10. Se requiere

$$\text{maximizar } -\int_0^1 u^2(t)\, dt$$

sujeto a las condiciones

$$\dot{x} = x + u, \qquad x(0) = 1, \qquad x(1) = 0.$$

Nótese que en este caso tenemos que $U_t = (-\infty, \infty)$ para cada $t \in [0, 1]$. El Hamiltoniano asociado a este problema es

$$\mathcal{H} \;=\; -u^2 + \lambda(x + u).$$

Por el Principio de Pontryagin, tenemos que

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\lambda \qquad \text{o bien} \qquad \lambda(t) = Ae^{-t}.$$

Ahora queremos maximizar el Hamiltoniano,

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = -2u + \lambda \qquad \text{y por lo tanto} \qquad u = \frac{A}{2}e^{-t}.$$

Puesto que $\partial^2\mathcal{H}/\partial u^2 = -2 < 0$, entonces $u = Ae^{-t}/2$ es un máximo. Puesto que $\dot{x} - x = u$, entonces

$$\dot{x} - x = \frac{A}{2}e^{-t} \qquad \text{o bien} \qquad x(t) = Be^{t} - \frac{A}{4}e^{-t}.$$

Las condiciones inicial y final implican que

$$A = \frac{4e^2}{1-e^2} \qquad \text{y} \qquad B = \frac{1}{1-e^2}.$$

A modo de ejercicio, el lector puede verificar que el Hamiltoniano es constante a lo largo de la trayectoria óptima y que esta constante es igual a

$$\frac{4e^2}{(e^2-1)^2}. \quad \square$$

Ejemplo 11. Se requiere

$$\text{maximizar} \quad \int_0^1 (x+u)\, dt$$

sujeto a las condiciones

$$\dot{x} = 1 - u^2, \qquad x(0) = 1, \qquad x(1) \text{ libre.}$$

Nótese que en este caso tenemos que $U_t = (-\infty, \infty)$ para cada $t \in [0,1]$. El Hamiltoniano asociado a este problema es

$$\mathcal{H} \;=\; (x+u) + \lambda(1-u^2).$$

Por el Principio de Pontryagin, tenemos que

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -1 \qquad \text{o bien} \qquad \lambda(t) = 1 - t$$

ya que la condición de transversalidad implica que $\lambda(1) = 0$. Ahora queremos maximizar el Hamiltoniano,

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 1 - 2\lambda u \qquad \text{y por lo tanto} \qquad u(t) = \frac{1}{2(1-t)}.$$

Se cumple también que $\partial^2\mathcal{H}/\partial u^2 = -2\lambda < 0$ y así hemos encontrado el máximo de $\mathcal{H}$. Por último

$$\dot{x} = 1 - \frac{1}{4(1-t)^2} \qquad \text{y} \qquad x = t - \frac{1}{4(1-t)} + \frac{5}{4}$$

ya que $x(0) = 1$. A modo de ejercicio, el lector puede verificar que el Hamiltoniano es constante a lo largo de la trayectoria óptima y que esta constante es igual a $9/4$. □

Ejemplo 12. Se requiere

$$\text{maximizar} \quad \int_0^2 (2x - 3u)\, dt$$

sujeto a las condiciones

$$\dot{x} = x + u, \qquad x(0) = 4, \qquad x(2) \text{ libre}, \qquad u(t) \in [0, 2].$$

El Hamiltoniano asociado a este problema es

$$\mathcal{H} \;=\; (2x - 3u) + \lambda(x + u).$$

Por el Principio de Pontryagin, tenemos que

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -2 - \lambda \qquad \text{o bien} \qquad \lambda(t) = Ae^{-t} - 2.$$

La condición de transversalidad $\lambda(2) = 0$ implica que

$$\lambda(t) \;=\; 2e^{2-t} - 2.$$

Ahora escribimos el Hamiltoniano como

$$\mathcal{H} \;=\; (2 + \lambda)x + (\lambda - 3)u$$

y observamos que si $\lambda > 3$, entonces $\mathcal{H}$ es máximo cuando $u = 2$. Pero $\lambda > 3$ si y sólo si $t < \tau$, en donde

$$(\mathbf{13}) \qquad \tau \;=\; 2 - \log\frac{5}{2} \;=\; 1.08371\cdots.$$

Así tenemos que el control óptimo está dado por

$$(\mathbf{14}) \qquad u(t) \;=\; \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \le t < \tau, \\ 0 & \text{si } \tau < t \le 2. \end{cases}$$

Una vez conocido el control óptimo, es posible resolver la ecuación diferencial para x. Tenemos entonces que

$$(\mathbf{15}) \qquad x(t) \;=\; \begin{cases} 6e^t - 2 & \text{si } 0 \le t \le \tau, \\ (6 - \dfrac{2}{e^\tau})e^t & \text{si } \tau \le t \le 2. \end{cases}$$

Verifique el lector que el Hamiltoniano es constante a lo largo de esta trayectoria y que el valor de esta constante es igual a $2(6e^2 - 5)$.

Por último, considere la siguiente expresión

$$(\mathbf{16}) \qquad \int_0^\tau (2x - 3u)\,dt + \int_\tau^2 (2x - 3u)\,dt$$

como función de τ, en donde u, x están dados en (14) y (15) respectivamente. Verificar que el valor de τ que maximiza (16) esá dado por (13). $\square$

§2. Prueba del principio.

En esta sección presentamos una "prueba" intuitiva del Principio de Pontryagin. Este argumento es correcto cuando se añaden hipótesis adicionales sobre la diferenciabilidad de las funciones implicadas. En la práctica, estas hipótesis adicionales no suelen satisfacerse.

Consideremos el problema de

$$(\mathbf{17}) \qquad \text{maximizar } J(u) \qquad \text{en donde} \qquad J(u) = \int_{t_0}^{t_1} g\big(x(t), t, u(t)\big)\, dt$$

sujeto a las siguientes condiciones

$$(\mathbf{18}) \qquad \dot{x} = f\big(x, t, u(t)\big), \qquad x(t_0) = x_0, \qquad x(t_1) = x_1, \qquad u(t) \in U_t.$$

Supondremos que el punto terminal (t_1, x_1) está fijo y consideramos al punto inicial (t_0, x_0) como variable. Para cada punto inicial, definimos

$$w(x_0, t_0) = \max J(u) = J(u^*)$$

en donde u^* es el control óptimo que lleva el sistema desde $x(t_0) = x_0$ hasta $x(t_1) = x_1$.

Sea $t_0 < t < t_1$. Puesto que la trayectoria óptima desde $x(t)$ hasta $x(t_1)$ está contenida en la trayectoria óptima desde $x(t_0)$ hasta $x(t_1)$, entonces

$$(\mathbf{19}) \qquad w(x_0, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} g\big(x^*(\xi),\, \xi,\, u^*(\xi)\big)\, d\xi + w(x^*(t), t)$$

en donde $x^*(t)$ es la trayectoria que lleva el sistema desde $x(t_0) = x_0$ hasta $x(t_1) = x_1$.

Tomando derivada en (19), obtenemos

$$\frac{d}{dt} w(x^*, t) = -g(x^*, t, u^*).$$

Aplicando la regla de la cadena al lado izquierdo,

$$\textbf{(20)} \qquad \frac{\partial w}{\partial x}(x^*,t)f(x^*,t,u^*) + \frac{\partial w}{\partial t}(x^*,t) \;=\; -g(x^*,t,u^*).$$

Consideramos ahora la siguiente perturbación del control óptimo

$$u(t) \;=\; \begin{cases} v & \text{para } t_0 \le t \le t_0 + h, \\ u_v^*(t) & \text{para } t_0 + h < t \le t_1, \end{cases}$$

en donde u_v^* denota el control óptimo que lleva el sistema desde el punto $x_v(t_0+h)$ hasta $x(t_1)$ y en donde $x_v(t)$ denota la respuesta bajo el control perturbado. Puesto que $u(t)$ no es óptimo, entonces

$$w(x_0,t_0) \;=\; J(u^*) \;\ge\; J(u)$$
$$= \int_{t_0}^{t_0+h} g(x_v,\xi,v)\,d\xi + w\big(x_v(t_0+h),t_0+h\big).$$

Reescribimos esta expresión en la forma

$$w(x_v(t_0+h),t_0+h) - w(x_v(t_0),t_0) \;\le\; \int_{t_0}^{t_0+h} g(x_v,\xi,v)\,d\xi.$$

Dividiendo entre h y haciendo que $h \to 0$, obtenemos

$$\frac{d}{dt}w(x_v(t),t)\bigg|_{t=0} \;=\; -g(x_0,t_0,v).$$

Aplicando la regla de la cadena al lado izquierdo y escribiendo (x,t) en lugar de (x_0,t_0), tenemos que

$$\textbf{(21)} \qquad \frac{\partial w}{\partial x}(x,t)f(x,t,v) + \frac{\partial w}{\partial t}(x,t) \;\le\; -g(x,t,v).$$

Esta última expresión es válida para cada x, cada $t \in [t_0, t_1]$ y toda $v \in U_t$.

Si definimos

$$G(x,t,v) \;=\; \frac{\partial w}{\partial x}(x,t)f(x,t,v) + \frac{\partial w}{\partial t}(x,t) + g(x,t,v)$$

entonces (20) y (21) implican que

(a) $G(x,t,v) \leq 0$ para toda x, t, v.

(b) $G(x^*,t,u^*) = 0$.

Manteniendo fija a $x = x^*$, entonces **(a)** y **(b)** implican que

$$\max_{v \in U} G(x^*,t,v) \;=\; G(x^*,t,u^*)$$

y por lo tanto

$$\mathcal{H} = g + \lambda f \qquad \text{es máximo en} \qquad u^*,$$

en donde hemos escrito

$$\textbf{(22)} \qquad \lambda(t) \;=\; \frac{\partial w}{\partial x}(x^*(t),t).$$

Si mantenemos fija a $u = u^*$, entonces **(a)** y **(b)** implican que G es máximo cuando $x = x^*$. Suponiendo diferenciabilidad,

$$\textbf{(23)} \qquad 0 \;=\; \frac{\partial G}{\partial x} \;=\; \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Puesto que

$$\dot{\lambda} \;=\; \frac{d}{dt}\frac{\partial w}{\partial x} \;=\; \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x}$$

entonces (23) implica que

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial}{\partial x}\big(g + \lambda f\big).$$

Esto termina la prueba intuitiva del principio de Pontryagin.

§3. Interpretación económica.

Si $\mathcal{H}$ es el Hamiltoniano, entonces $\mathcal{H}\,dt$ se puede interpretar como la contribución total a la función objetivo J, producida en un intervalo de tiempo de duración dt. Para ver que esto en efecto es así, nótese que

$$\mathcal{H}\,dt = g\,dt + \lambda f\,dt = g\,dt + \lambda\,dx \tag{24}$$

en donde hemos utilizado el hecho de que $\dot{x} = f$, ver la condición (6). Es claro que $g\,dt$ representa la contribución directa a la función objetivo. Por (22), vemos que

$$\lambda = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial J}{\partial x}.$$

Por lo tanto, λ es el incremento que sufre J cuando x se incrementa en una unidad. Por lo tanto, $\lambda\,dx$ representa el incremento indirecto que sufre J debido a un incremento en el nivel de existencias (stock) de tamaño dx.

Puesto que $\mathcal{H}\,dt$ se puede interpretar como la contribución total a la función objetivo J, entonces es claro que el control u debe maximizar el Hamiltoniano $\mathcal{H}$ en todo tiempo t.

§4. La ecuación de Euler.

En esta sección usamos el Principio del Máximo de Pontryagin para obtener la ecuación de Euler (7) del Capítulo 1. Para ésto, consideremos el problema de

$$\text{maximizar} \int_a^b F(t,x,u)\,dt$$

sujeto a las restriciones

$$\dot{x} = u, \qquad x(a) = x_1, \qquad x(b) = x_2, \qquad u(t) \in (-\infty, \infty).$$

El Hamiltoniano es

$$\mathcal{H} \;=\; F + \lambda u.$$

La variable adjunta satisface

$$\textbf{(25)} \qquad \dot{\lambda} \;=\; -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \;=\; -F_2.$$

La condición de que u maximiza a $\mathcal{H}$ implica que

$$0 \;=\; \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \;=\; F_3 + \lambda.$$

Tomando derivadas y utilizando (25)

$$F_2 - \frac{d}{dt}F_3 \;=\; 0.$$

Esta es la ecuación de Euler.

Referencias

Chiang, A.C. *Fundamental methods of mathematical economics.* McGraw-Hill Book Co., 2004.

Clark, C.W. *Mathematical bioeconomics.* Second edition. John Wiley & Sons, 1990.

Kamien, M.I.; Schwartz, N.L. *Dynamic optimization.* North-Holland Publishing Co., 1981.

Simmons, G.F. *Differential equations with applications and historical notes.* McGraw-Hill Book Co., 1972.

Smith, D.R. *Variational methods in optimization.* Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1998.