Física de Radiaciones I
Hoja 3 - 2024 - Instituto de Física

1. a. Considera la ecuación $\nabla^2 \frac{1}{r} = -\delta^3(\vec{r})$. Muestra que la ecuación se verifica, considerando por separado los casos $r \neq 0$ y $r = 0$. Para este último caso integra la ecuación en una esfera alrededor del origen.
   b. Considera la ecuación de ondas con una fuente $-f(\vec{r},t)$, para una función $\psi(\vec{r},t)$:
   $$\nabla^2\psi(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} = -f(\vec{r},t)$$
   Halla la transformada de Fourier en el tiempo
   $$\tilde{\varphi}(\vec{r},\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\vec{r},t)\, e^{i\omega t}dt$$
   de esta ecuación y de las funciones $\psi(\vec{r},t)\; y\; f(\vec{r},t)$, que son respectivamente $\tilde{\psi}(\vec{r},\omega)\; y\; \tilde{f}(\vec{r},\omega)$, y escriba la ecuación para la función $\tilde{\psi}(\vec{r},\omega)$:
   $$\nabla^2\tilde{\psi}(\vec{r},\omega) + \kappa^2\,\tilde{\psi}(\vec{r},\omega) = -\tilde{f}(\vec{r},\omega)\; con\;\; \kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$
   Esta es la llamada ecuación de Helmholtz.
   c. La función de Green de esta ecuación es $G(\vec{r},\vec{r}')$, solución de
   $$\nabla^2 G(\vec{r},\vec{r}') + \kappa^2\, G(\vec{r},\vec{r}') = -\delta(\vec{r}-\vec{r}')$$
   Muestra que si se conoce la función de Green $G(\vec{r},\vec{r}')$ entonces la solución de la ecuación de Helmholtz puede escribirse como
   $$\tilde{\psi}(\vec{r},\omega) = \int \tilde{f}(\vec{r}',\omega)G(\vec{r},\vec{r}')\,d^3r'$$
   d. Para calcular $G(\vec{r},\vec{r}')$ muestra que la simetría del problema implica que $G(\vec{r},\vec{r}') = G(R)$, siendo $R = |\vec{r}-\vec{r}'|$. Resuelve entonces la ecuación en coordenadas esféricas y muestra que $G(R) = A\,\frac{e^{\pm i\,\kappa R}}{R}$, siendo A una constante a determinar y $\kappa = \sqrt{\kappa^2}$.
   e. Calcula A integrando la ecuación que satisface la función de Green $G(R)$, en una pequeña esfera centrada en $R = 0$. Ten en cuenta que para $R \approx 0$ la función $G(R) \approx \frac{A}{R}$. Muestra entonces que $A = \frac{1}{4\pi}$.
   f. Escribe entonces las dos soluciones para $\psi(\vec{r},t)$, que provienen del signo $\pm$ de la parte c; una de ellas, correspondiente al signo $+$ se llama solución avanzada, mientras que la otra, correspondiente al signo $-$, se llama solución retardada. En los casos en que se estudia la propagación hacia el futuro de ondas a partir de fuentes localizadas, la solución retardada corresponde a la solución física adecuada.

2. Considera un átomo que emite radiación de longitud de onda 500 nm. Calcula la energía del fotón emitido. Supón una vida media de 10^{-7} s, valor típico de un átomo en un estado excitado. Estime la potencia emitida en el decaimiento.

3. En el LHC, en el que colisionan protón-protón, la luminosidad es $L = 10^{34} cm^{-2}s^{-1}$.

   a. Calcula el número de choques p-p si la sección eficaz total es de 110 mbn.
   b. Si la sección eficaz para producir un bosón de Higgs es 50 femtobn, calcula el número de bosones de Higgs que se producen en un día.

4. *Radiación de Thomson*. Considera un electrón libre sobre el que incide una onda plana electromagnética de frecuencia ω y amplitud E_0 y polarización lineal.

   a. Calcula la potencia media radiada por el electrón, acelerado por la onda. Indica en qué condiciones este cálculo es válido.
   b. Indica en qué condiciones se pueden despreciar los efectos del campo magnético de la onda incidente sobre el electrón.
   c. Calcula la sección eficaz diferencial y la total. Expresa los resultados en función del "radio clásico" del electrón: $r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \simeq 2.82 fm$.

5. Considera una carga que se mueve con vector velocidad ***v*** constante.

   a. Encuentra el tiempo retardado para un punto de observación ***r*** en un tiempo *t*.
   b. Escribe los potenciales escalar y vector en función de *c, t, r,* ***r*** y ***v***.
   c. Muestra que la expresión anterior para el potencial escalar se puede escribir:

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R\sqrt{1 - v^2 \sin^2\theta / c^2}}$$

   donde R es el módulo del vector **R** = **r** – **v**t, y θ el ángulo entre **R** y **v**.
   d. Calcula los campos eléctrico y magnético para dicha carga a partir de los potenciales de Lienard-Wiechert calculados:

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{\mathscr{r}}}{(\boldsymbol{\mathscr{r}} \cdot \mathbf{u})^3}[(c^2 - v^2)\mathbf{u} + \boldsymbol{\mathscr{r}} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})].} \quad \boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c}\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t).},$$

$$\mathbf{u} \equiv c\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}} - \mathbf{v},$$

   e. Grafica las líneas de campo para los siguientes valores de β: 0,1, 0,5 y 0,9.

6. Considera una partícula de carga *q* que se mueve a velocidad constante. Calcula la potencia total que atraviesa un plano perpendicular al movimiento de la partícula que se ubica a una distancia *d* de la partícula. Calcula el valor máximo de esta potencia para electrones y diferentes distancias (fermi, angstrom, micra, cm, …).

7. Considera una partícula ultrarrelativista con velocidad paralela a la aceleración.

   a. Calcula, en función de γ, el ángulo con distribución angular de potencia máxima.
   b. Para electrones de energía 200 MeV calcula ese valor.

c. Para el ángulo calculado en a, calcula el valor de la distribución angular de potencia.

d. Calcula el valor numérico de c para electrones de 200 MeV de energía.

8. Considera una partícula de carga q que se mueve en un círculo de radio a a velocidad constante. Asume que el círculo se haya en el plan xy, centrado en el origen y en $t=0$ la carga está en $(a,0)$ en el eje positivo de las x. Halla los potenciales de Lienard-Wiechert para puntos del eje z.

9. Considera una partícula en movimiento hiperbólico a lo largo del eje x:

$$\vec{w}(t) = \sqrt{b^2 + (ct)^2} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

Grafica w con respecto a t. En cuatro puntos representativos de la curva, dibuja la trayectoria de una señal luminosa emitida por la partícula en ese punto, tanto en la dirección positiva como en la negativa de las x. ¿Qué región de la gráfica corresponde a los puntos (x, t) desde los que no puede verse la partícula? ¿En qué instante de tiempo alguien en un punto x ve primero la partícula? (Previo a esto el potencial en x es evidentemente cero). ¿Es posible que una partícula una vez vista desaparezca de la visión?

10. Sea una carga puntual q cuyo movimiento se limita al eje x. Muestra que los campos en puntos del eje a la "derecha" de la carga vienen dados por

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{c+v}{c-v}\right)\hat{x}, \qquad \vec{B} = 0$$

¿Cómo son los campos a la "izquierda" de la carga?

11. a. Sea un electrón que desacelera con aceleración $-a$ ($a > 0$) desde su velocidad inicial v_0 hasta el reposo. Suponiendo la velocidad mucho menor que c, calcula la fracción de energía cinética inicial que es radiada. Calcula esta fracción para electrones térmicos en un conductor y asume que la distancia libre media recorrida es 30 Å.
b. En el átomo de Bohr para el hidrógeno, un electrón en el estado base tiene una trayectoria de radio 5×10^{-11} m. La electrodinámica clásica predice que el electrón radía y, por tanto, caería en espiral hacia el protón del núcleo. Muestra que siendo $v \ll c$ para la mayoría de la trayectoria se puede estimar el tiempo de caída usando la fórmula de Larmor y suponiendo que en cada revolución la trayectoria es circular.

12. Supón que la velocidad y aceleración son colineales en un instante en el movimiento de una partícula cargada. Encuentra la distribución angular y la potencia total de la radiación emitida. Calcula el ángulo en el que se emite potencia máxima y estima este valor en el caso ultra-relativista. Compara el valor máximo de la radiación emitida con el mismo valor en el caso no relativista, y expresa el resultado en función de γ. Repite el ejercicio en el caso en que velocidad y aceleración son perpendiculares.