Física de Radiaciones I
Hoja 4 - 2024 - Instituto de Física

1. La fórmula de Larmor, que expresa la potencia total emitida por una partícula no relativista, viene dada por la expresión:
$$\mathrm{P} = \frac{q^2 a'^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$$
A partir de esta expresión, obtenga la fórmula generalizada de Larmor (también conocida como fórmula de Liénard) para partículas relativistas:
$$\mathrm{P} = \frac{\mu_0 c}{6\pi} q^2 \gamma^6 \left(\dot{\vec{\beta}}^2 - \left(\vec{\beta} x \dot{\vec{\beta}}\right)\right)$$
Para obtener esta fórmula reproduzca los siguientes resultados.
   a. Muestre que la fórmula de Larmor se puede escribir como
   $$\mathrm{P} = \frac{q^2 a'^2}{6\pi\varepsilon_0 m^2 c^3} \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}\right)$$
   donde m es la masa de la partícula cargada, y $\vec{p}$ su impulso lineal.
   b. Muestre ahora que una generalización invariante Lorentz de la expresíon anterior, es:
   $$\mathrm{P} = -\frac{q^2 a'^2}{6\pi\varepsilon_0 m^2 c^3} \left(\frac{dP}{d\tau}\right)^2$$
   donde τ es el tiempo propio de la partícula, $P = \left({}^{E}/_{c}, \vec{p}\right)$ es el cuadimpulso, y $\left(\frac{dP}{d\tau}\right)^2$ es el cuadrado del cuadrimpulso $\frac{dP}{d\tau}$. Recuerde que $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ donde $p = |\vec{p}|$ y use estas expresiones para mostrar que en el límite no relativista $\beta \to 0$ esta expresión se reduce a la de parte a..
   c. Muestre entonces, usando que $E = \gamma m c^2$ y que $\vec{p} = mc\gamma\vec{\beta}$, donde $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$, que la fórmula de b. es idéntica a la expresión de la fórmula de Lienard.

   Observación: puede haber otros invariantes Lorentz para poner en b. en vez de $\left(\frac{dP}{d\tau}\right)^2$, como $P \cdot \frac{dP}{d\tau}$, pero todos o se anulan o dan contribuciones proporcionales a m^2.

2. Teniendo en cuenta que la distribución angular de la potencia radiada por una partícula acelerada es:
$$\frac{\mathrm{dP'}}{\mathrm{d\Omega}} = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c} \frac{\left|\hat{n}' x \left[\left(\hat{n}' - \vec{\beta}'\right) x \dot{\vec{\beta}}'\right]\right|^2}{\left(1 - \vec{\beta}' \cdot \hat{n}'\right)^5}$$
Obtenga la fórmula de Larmor generalizada del problema 1.

3. En el caso de β paralelo a $\dot{\beta}$:
   a) Determine el ángulo para el que $\mathrm{dP'}/\mathrm{d\Omega}$ es máximo.
   b) Determine el valor de $\mathrm{dP'}/\mathrm{d\Omega}$ en el máximo y la proporcionalidad con γ.
   c) Demuestre que el valor medio de θ va como $1/\gamma$.
   d) Calcule a partir de $\mathrm{dP'}/\mathrm{d\Omega}$ la expresión de P' en este caso.

4. Repita el problema 3 para el caso de $\mathrm{dP}/\mathrm{d}\Omega$. Recuerde que P' es la potencia emitida y P la recibida, ambas relacionadas a través de la expresión:

$$P' = P\frac{dt}{dt'}$$

$$\frac{dt}{dt'} = 1 - \vec{\beta}' \cdot \hat{n}'$$

5. Repita el problema 3 para el caso de β perpendicular a $\dot{\beta}$ y determine las direcciones en las que no se emite radiación.

6. Repita el problema 4 para el caso de β perpendicular a $\dot{\beta}$ y determine las direcciones en las que no se emite radiación.

7. Obtenga la relación entre la potencia radiada en un acelerador lineal (movimiento unidimensional) y la potencia suministrada al acelerador dE/dt. Considere el caso relativista $(\beta \to 1)$. Estime cuantitativamente si la energía radiada en un acelerador lineal es significativa (típicamente la ganancia en energía de un acelerador es menor a 50 MeV/m).

8. Repita el problema 7 para el caso de un acelerador circular como un sincrotrón o un betatrón.

9. Calcula la energía radiada por

a) electrones en un acelerador lineal de 50 GeV de 3 km de largo (asume aceleración constante).
b) protones de 13 TeV en una revolución en una circunferencia de 8,6 km de radio.
c) electrones de 6 MeV en un acelerador lineal de 150 cm (típicamente usados en radioterapia). Calcula, además, la energía radiada cuando estos electrones inciden sobre el blanco de tungsteno y se detienen (aproximadamente unos 0,3 cm de tramo).