Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral 1 (Física)
Primer semestre 2024

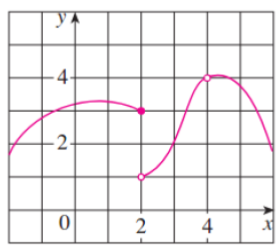
Práctico 2

1. Calcular los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x};\quad b)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^7-1}{x^3-1};\quad c)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}.$$

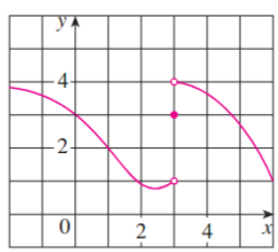
2. Utilice la gráfica de f para establecer el valor de cada cantidad se esta existe. Si no existe, explique por qué.

$$a)\ \lim_{x\to 2^-} f(x);\quad b)\ \lim_{x\to 2^+} f(x);\quad c)\ \lim_{x\to 2} f(x);\quad d)\ f(2);\quad f)\ f(4).$$



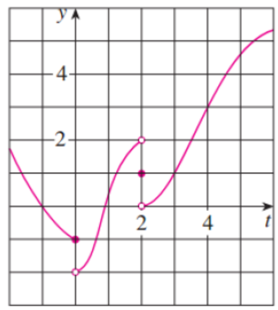
3. Para la función f cuya gráfica está dada, establezca el valor de cada una de las siguientes cantidades. Si no existe, explicar por qué.

$$a)\ \lim_{x\to 1} f(x);\quad b)\ \lim_{x\to 3^-} f(x);\quad c)\ \lim_{x\to 3^+} f(x);\, d)\ \lim_{x\to 3} f(x);\quad e)\ f(3).$$



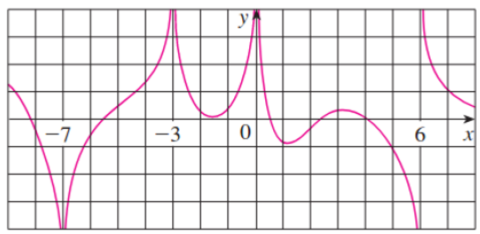
4. Para la función f cuya gráfica está dada, establezca el valor de cada una de las siguientes cantidades. Si no existe, explicar por qué.

$$a)\ \lim_{x\to 0^-} f(x);\quad b)\ \lim_{x\to 0} f(x);\quad c)\ \lim_{x\to 2^+} f(x);\quad d)\ f(2);$$
$$e)\ \lim_{x\to 0^+} f(x);\quad f)\ \lim_{x\to 2^-} f(x);\quad g)\ \lim_{x\to 2} f(x);\quad h)\ \lim_{x\to 4} f(x).$$



5. Para la función f cuya gráfica está dada, establezca el valor de cada una de las siguientes cantidades. Determinar las ecuaciones de las asintóticas verticales.

$$a)\ \lim_{x\to -7} f(x); \quad b)\ \lim_{x\to -3} f(x); \quad c)\ \lim_{x\to 0} f(x); d)\ \lim_{x\to 6^-} f(x); \quad e)\ \lim_{x\to 6^+} f(x).$$



6. Trace la gráfica de cada una de las siguientes funciones y utilícelas para determinar los valores de a para los cuales $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.

$$a)\ f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x < -1, \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x < -1, \\ 2-x & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} 1+\operatorname{sen}(x) & \text{si } x < 0, \\ \cos(x) & \text{si } 0 \leq x \leq \pi, \\ \operatorname{sen}(x) & \text{si } x > \pi. \end{cases}$$

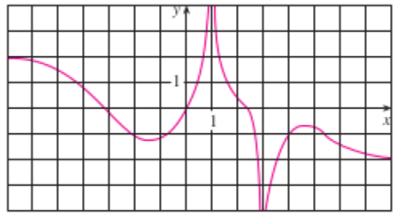
7. Determinar cada uno de los siguientes límites infinitos:

$$a)\ \lim_{x\to -3^+} \frac{x+2}{x+3}; \quad b)\ \lim_{x\to -3^-} \frac{x+2}{x+3}; \quad c)\ \lim_{x\to 1} \frac{2-x}{(x-1)^2}; \quad d)\ \lim_{x\to 5^-} \frac{e^x}{(x-5)^3};$$

$$e)\ \lim_{x\to 3^+} \log(x^2-9); \quad f)\ \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}; \quad g)\ \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-2x-8}{x^2-5x+6}.$$

8. Para la función f cuya gráfica está dada, establezca el valor de cada una de las siguientes cantidades.

$$a)\ \lim_{x\to +\infty} f(x); \quad b)\ \lim_{x\to -\infty} f(x); \quad c)\ \lim_{x\to 1} f(x); \quad d)\ \lim_{x\to 3} f(x); \quad e)\text{Ecuaciones de las asintóticas.}$$



9. Encuentre el límite o demuestre que no existe:

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{2x+1};\quad b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{x^3+x-1};\quad c)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^6}{1+x^4};$$
$$d)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2+1};\quad e)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1-e^x}{1+2e^x};\quad f)\ \lim_{x\to+\infty}\operatorname{sen}(x).$$

10. Explicar por qué cada una de las siguientes funciones es discontinua en el punto $x=a$ dado. Dibuje la gráfica de la función en todos los casos.

$$a)\ f(x)=\frac{1}{x+2},\quad a=-2.\quad b)\ f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x+2} & \text{si } x\neq-2,\\ 1 & \text{si } x=-2,\end{cases}\quad a=-2.$$
$$c)\ f(x)=\begin{cases}e^x & \text{si } x<0,\\ x^2 & \text{si } x\geq 0,\end{cases}\quad a=0.\quad d)\ f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-x}{x^2-1} & \text{si } x\neq 1,\\ 1 & \text{si } x=1,\end{cases}\quad a=1.$$
$$e)\ f(x)=\begin{cases}\cos(x) & \text{si } x<0,\\ 0 & \text{si } x=0,\\ 1-x^2 & \text{si } x>0,\end{cases}\quad a=0.$$

11. Encuentre los números en los que f es discontinua. ¿En cuáles de éstos f es continua por derecha, por izquierda o ninguna de las dos? Trace la gráfica de f en cada caso.

$$a)\ f(x)=\begin{cases}1+x^2 & \text{si } x\leq 0,\\ 2-x & \text{si } 0<x\leq 2,\\ (x-2)^2 & \text{si } x>2.\end{cases}\qquad b)\ f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{si } x\leq 1,\\ 1/x & \text{si } 1<x<3,\\ \sqrt{x-3} & \text{si } x\geq 2.\end{cases}$$

12. Encuentre los valores de a y b para los cuales f es continua para todo $x\in\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x<2,\\ ax^2-bx+3 & \text{si } 2\leq x<3,\\ 2x-a+b & \text{si } x\geq 3.\end{cases}$$

13. Utilice el teorema de Bolzano para demostrar que existe (al menos) una solución de cada una de las siguientes ecuaciones en el intervalo especificado.

$$a) x^4+x-3=0,\quad I=(1,2);\quad b) \sqrt[3]{x}=1-x,\quad I=(0,1).$$

14. Demuestre que cada una de las siguientes ecuaciones tiene al menos una solución.

$$a)\ \cos(x)=x^3;\quad b)\ \ln x=3-2x.$$

Utilice la calculadora (o computadora) para hallar un intervalo de longitud 10^{-2} que contenga la solución.

Ejercicios Opcionales

15. ¿Existe un número que sea 1 más que su cubo?

16. Un tren sale de la estación A a las 12:00 y llega a la estación B a las 19:00 del mismo día. Al día iguiente, en mismo tres sale en la dirección contraria, desde la estación B, a las 12:00, arribando a la estación A a las 19:00. Demostrar que existe un punto del trayecto en el cual el tren ha pasado en ambas direcciones a la misma hora.

17. En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula con velcidad v es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

donce m_0 es la masa de la partícula en reposo y c es la velocidad de la luz. ¿Qué pasa cuando $v \to c$?