Ecuaciones en derivadas parciales

FCIEN-Udelar

1er Semestre 2024

Introducción

- Evans
- Noemi Wolanski ODE
- Aimar - Bongioanni - Morin

Una ecuación diferencial es una ecuación cuya incógnita es una función y en la que aparecen algunas derivadas de esa función. Se dividen en dos gupos.

Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOS). Si la función que interviene tiene solo una variable independiente.

Ejemplo. $\underbrace{\overset{3}{x'''} + 7x'' + 8x' - 2x}_{\text{lineal en } x} = \underbrace{\sin(t)}_{\neq 0}$

Es una EDO lineal no homogénea de orden 3

Introducción

Definición.

Una EDO es una relación de la forma

$$F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$$

para la función desconocida $x \in C^n(I)$ donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto. Aquí $F \colon U \to \mathbb{R}$ es una función, $U \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ es un conjunto abierto y $x', \dots, x^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$ son las derivadas ordinarias de x.
El orden de la derivada más alta que aparece en F se denomina el orden de la ecuación.
Si la función F es lineal en x y sus derivadas la ecuación se dice lineal.
En caso contrario se dice no lineal.

Introducción

Ecuaciones en derivadas parciales (EDPs). Si la función que itenrviene tiene varias variables independientes.

Ejemplo.

Ecuación de Laplace $\Delta u = 0$; Elíptica

Ecuación del calor $u_t + d\Delta u = 0$; Parabólica

Ecuación de ondas $u_{tt} - c^2\Delta u = 0$. Hiperbólica

son los 3 tipos de ecuación que Vamos a estudiar en el curso

Introducción

Definición de EDPs

Definición

Una EDP es una ecuación de la forma

$$F(x_1, \dots, x_N, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_N}, u_{x_1 x_1}, \dots, u_{x_N x_1}, \dots) = 0$$

donde $u = u(x_1, \dots, x_N)$ es la incógnita.
El orden de una ecuación es el orden de la derivada más alta que aparece en ella.
Si la función F es lineal en u y sus derivadas la ecuación se dice lineal.
En caso contrario se dice no lineal.

Intrducción

Ejemplos ecuaciones lineales

Primer orden

Ecuación de transporte $u_t + \mathbf{v} \cdot \nabla u = 0.$

Segundo orden

Ecuación de Laplace $\Delta u = 0;$

Ecuación de Poisson $\Delta u = f(x);$

Ecuación del calor $u_t - \kappa \Delta u = 0;$

Ecuación de ondas $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0;$

Ecuación de Black-Scholes $u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx} + rxu_x - ru = 0;$

Ecuación de Schrödinger $-iu_t = \Delta u + V(x)u.$

Cuarto orden

Ecuación de una placa vibratoria $u_{tt} - \Delta^2 u = 0.$

Intrducción

Ejemplos ecuaciones no lineales

Primer orden

Ecuación de Burger $u_t + cuu_x = 0$ (cuasilineal);

Ecuación Eikonal $|\nabla u| = c(x)$ (completamente no lineal).

Segundo orden

Ecuación de Fisher $u_t - d\Delta u = ru(M-u)$ (semilineal);

Ecuación de medios porosos $u_t = k\,\mathrm{div}(u^\gamma \nabla u)$ (cuasilineal);

Ecuación de superficies mínimas $\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0$ (cuasilineal).

Intrducción

Problemas bien puestos

Para determinar la solución de una ecuación diferencial, se requieren ciertos datos adicionales:

- Datos de borde o contorno (representan la interacción con el exterior);
- Datos iniciales.

Uno de los objetivos fundamentales de la teoría es lograr que el modelo posea las siguientes propiedades:

- Existencia de solución;
- Unicidad de solución;
- Dependencia continua con respecto a los datos del problema.

Cuando se dan estas tres cosas se dice que el problema esta bien puesto en el sentido de Hadamard. Si alguna de las tres falla se dice que el problema está mal puesto.

Intrducción

Leyes de conservación. Ecuaciones Constitutivas

Sean U una región de $\mathbb{R}^3$ y ∂U su fontera, que suponemos suave a trozos. Estamos interesados en describir (cuantitativamente) la evolución espacio-temporal de una cantidad E en U. Por ejemplo, la energía térmica, la masa de un compuesto, etc.

La ley de conservación básica establece que

La razón de cambio temporal de E	=	La razón de inmigración <u>menos</u> la razón de emigración a traveés de ∂U	+	La razón de creación <u>menos</u> la razón de desaparición dentro U.
$E_t(U,t)$		$-\phi(\partial U,t)$		$G(U,t)$

Intrducción

Leyes de conservación. Ecuaciones Constitutivas

Supongamos, para fijar ideas, que U es una bola abierta de $\mathbb{R}^3$, $E = E(U,t)$ es la energía térmica en la región U a tiempo t. Si $\Phi(\partial U,t)$ es la cantidad de energía térmica que atraviesa la superficie ∂U en la dirección de la noramal exterior ν por unidad de tiempo y $\mathcal{G}(U,t)$ es la energía creada (o perdida en U) por unidad de tiempo, tenemos que la ley de conservación de la energía se puede escribir de la siguiente manera

$$E_t(U,t) = -\Phi(\partial U,t) + \mathcal{G}(U,t).$$

Ahora realizamos la siguiente suposición

$$E(U,t) = \int_U e(x,t)\rho(x,t)dx, \ \Phi(\partial U,t) = \int_{\partial U} \phi(x,t)\cdot\nu dS, \ \text{ y } \mathcal{G}(U,t) = \int_U g(x,t)dx.$$

Donde e es la densidad de energía térmica, ρ es la densidad de masa, ϕ es el campo vectorial de velocidades de desplazamiento de la energía térmica y g es la tasa de creación/aniquilación de energia.

Intrducción

Leyes de conservación. Ecuaciones Constitutivas

Entonces

$$E_t(U,t) = -\Phi(\partial U,t) + \mathcal{G}(U,t).$$

se puede reescribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\int_U e(x,t)\rho(x,t)dx\right) &= -\int_{\partial U}\phi(x,t)\cdot\nu dS + \int_U g(x,t)dx\\ &= \int_U \mathrm{div}\phi(x,t)dx + \int_U g(x,t)dx\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_U \left[\frac{d}{dt}\left(e(x,t)\rho(x,t)\right) - \mathrm{div}\phi(x,t) - g(x,t)\right]dx = 0.$$

Intrducción

Leyes de conservación. Ecuaciones Constitutivas

Si Ω es una región de $\mathbb{R}^3$ con frontera suave tal que

$$\int_B \left[\frac{d}{dt}(e(x,t)\rho(x,t)) - \operatorname{div}\phi(x,t) - g(x,t) \right] dx = 0.$$

para toda bola $B \subset \Omega$ y $t \in (0,T)$ entonces

$$\frac{d}{dt}(e\rho) - \operatorname{div}\phi - g = 0 \text{ en } \Omega \times (0,T),$$

es decir

$$\frac{d}{dt}(e\rho) - \operatorname{div}\phi = g \text{ en } \Omega \times (0,T).$$

Esta ecuación se suele denominar ecuación de continuidad.

Intrducción

Leyes de conservación. Ecuaciones Constitutivas

Supongamos ahora que:

- $\rho(x,t) = \rho_0$ (es constante);
- $e(x,t) = cu(x,t)$, donde u es la temperatuara en el punto x a tiempo t y c es una constante llamada calor especifico;
- La ley de Fourrier. Esta ley psotula que el flujo de energïa sigue la linea de mayor decaimiento (el calor se difunde de donde hay más calor hacia donde hay menos claor). Esto nos dice

$$\phi = -k\nabla u$$

  donde k es la conductividad térmica.

Bajo esto supuestos

$$\frac{d}{dt}(e\rho) - \mathrm{div}\phi = g \text{ en } \Omega \times (0,T)$$

se rescribe de la siguiente manera

$$c\rho_0 u_t - k\mathrm{div}\nabla u = g \text{ en } \Omega \times (0,T)$$

Intrducción

Leyes de conservación. Ecuaciones Constitutivas

es decir

$$u_t = \frac{k}{\rho_0 c}\Delta u + \frac{g}{\rho_0 c} \text{ en } \Omega \times (0, T).$$

Llammando $\kappa = \frac{k}{\rho_0 c}$ y $f = \frac{g}{\rho_0 c}$, se obtiene la ecuación del calor o de difusión

$$u_t = \kappa \Delta u + f \text{ en } \Omega \times (0, T).$$

Como la ecuación tiene una derivada con respecto al tiempo t debemos proveer una condición inicial, usualmente a tiempo $t = 0$. En este contexto, esta codición inicial se denomina temperatura inicial

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ en } \Omega.$$

Entonces sabemos que la distribución de temperatura inicial y que la temperatura cambia acorde a la ecuación del calor. ¿Es esta información suficiente para predecir la temperatura en el futuro?

Intrducción
Condición de Contorno

Condición de Dirichlet. En este tipo de condición se supone que la temperatura exterior de la región es conocida. En este caso

$$u(x,t) = h(x,t) \quad \text{en } \partial\Omega \times (0,T),$$

donde h es una función conocida. Bajo esta condición el problema a resolver es

$$\begin{cases} u_t = \kappa \Delta u + f & \text{en } \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) = h(x,t) & \text{en } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

En el caso que $h \equiv 0$ se denomina condición de Dirichlet homogénea.

Intrducción
Condición de Contorno

Condición de Neumann. En este tipo de condición se supone que se conoce el flujo del calor en lugar de la temperatura, es decir

$$\varphi(x,t) = -k\nabla u \cdot \nu = -k\frac{\partial u}{\partial \nu} \text{ en } \partial\Omega \times (0,T),$$

Bajo esta condición el problema a resolver es

$$\begin{cases} u_t = \kappa \Delta u + f & \text{en } \Omega \times (0,T), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = \psi(x,t) & \text{en } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{en } \Omega \end{cases}$$

donde $\psi = -\frac{\varphi}{k}$. En el caso que $\psi \equiv 0$ se denomina condición de Neumann homogénea.

Intrducción

Condición de Contorno

Condición de Robin. Cuando el objeto está en contacto con un fluido en movimiento (aire, agua, aceite, etc.), entonces las condiciones hasta ahora vistas no parecen del todo apropiadas. Por ejemplo, imaginemos un objeto que está caliente, y en contacto con aire en movimiento. El calor saldrá del objeto, calentando el aire. Y el aire se llevará el calor por el movimiento mismo. Experimentos muestran que el flujo de calor que sale del objeto es proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto ($u(x,t)$) y la temperatura del fluido exterior ($h(x,t)$). Esta condición de frontera se llama Ley de enfriamiento de Newton. Si la queremos escribir en términos mateméticos resulta

$$-k\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = \mathcal{H}\left(u(x,t) - h(x,t)\right) \text{ en } \partial\Omega \times (0,T),$$

donde la constante de proporcionalidad $\mathcal{H}$ se llama coeficiente de transferencia de calor o coeficiente de convección.

Intrducción
Condición de Contorno

Si llamamos $\gamma = \frac{\mathcal{H}}{k}$ y $\hat{h} = \frac{h}{k}$, tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \gamma u = \hat{h} \text{ en } \partial\Omega \times (0, T),$$

este tipo de condicion se denomina condición de Robin.
Bajo esta condición el problema a resolver es

$$\begin{cases} u_t = \kappa \Delta u + f & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \gamma u = \hat{h} & \text{en } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega \end{cases}$$

Cuando $\hat{h} \equiv 0$ se denomina condición de Robin homogénea.

Clasificación de las ecuaciones lineales de 2^{do} orden

$$a(x,y)\,u_{xx} + 2b(x,y)\,u_{xy} + c(x,y)\,u_{yy} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0$$

Queremos encontrar una forma mas simple para nuestra ecuación. Para eso planteo un cambio de variables

$$r = r(x,y)$$

$$s = s(x,y)$$

$$u(x,y) = v(r,s)$$

y la ecuacion queda

$$u_x = V_r r_x + V_s s_x$$

$$u_{xx} = V_{rr} r^2 + V_{rs} r_x s_x + V_r r_{xx}$$

$$V_{sr} r_x s_x + V_{ss} s_x^2 + V_s s_{xx}$$

$$= V_{rr} r_x^2 + 2 V_{rs} r_x s_x + V_{ss} s_x^2$$

$$+ V_r r_{xx} + V_s s_{xx}$$

$$u_{xy} = V_{rr} r_x r_y + V_{rs} r_x s_y + V_r r_{xy}$$

$$V_{sr} s_x r_y + V_{ss} s_x s_y + V_s s_{xy}$$

$$u_{xy} = V_{rr} r_x r_y + V_{rs}(r_x s_y + s_x r_y)$$
$$+ V_{ss} s_x s_y + V_r r_{xy} + V_s s_{yx}$$
$$u_{yy} = V_{rr} r_y^2 + 2 V_{rs} r_y s_y + V_{ss} s_y^2$$
$$+ V_r r_{yy} + V_s s_{yy}$$
$$0 = a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y)$$
$$= (a r_{xx}^2 + 2b r_x r_y + c r_y^2) + 2(a r_x s_x + b r_x s_y +$$
$$+ b r_y s_x + c r_y s_y) V_{rs} + (a s_x^2 + 2b s_x s_y + c s_y^2) V_{ss}$$

$+ G(r, s, v, v_r, v_s)$

Para eliminar la mayor cantidad de terminos de 2do orden como sea posible

$$a r_x^2 + 2b r_x r_y + c r_y^2 = 0$$

$$a s_x^2 + 2b s_x s_y + c s_y^2 = 0$$

Estamos buscando 2 soluciones de

$$(w_x, w_y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} = 0$$

$$0 = a\omega_x^2 + 2b\,\omega_x\omega_y + c\,\omega_y^2 \qquad a \neq 0$$

$$= a(\omega_x + \lambda_1\omega_y)(\omega_x + \lambda_2\omega_y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \dfrac{2b}{a} \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \lambda_1\left(\frac{2b}{a} - \lambda_1\right) = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \lambda_1^2 - \frac{2b}{a}\lambda_1 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\lambda_2 = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - AC}}{a}$$

$$\lambda_1 = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

$\Delta = b^2 - ac > 0$ hiperbólica

$\Delta = 0$ parabólica

$\Delta < 0$ elíptica

Si $\Delta > 0 \Rightarrow \lambda_1 \wedge \lambda_2$ son reales

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \omega_y + \lambda_1 \omega_x = 0 \\ \omega_y + \lambda_2 \omega_x = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} y + \lambda_1 x = c_1 \\ y + \lambda_2 x = c_2 \end{array}$$

$$r(x,y) = y + \lambda_1 x \qquad \Longrightarrow \qquad v_{rs} + G(r, s, v, v_r, v_s) = 0$$
$$s(x,y) = y + \lambda_2 x$$

Forma canónica de las ecuaciones hiperbólicas

Si $\Delta = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = b/a$

voy a poder eliminar uno de los dos terminos no los dos

$$r(x,y) = y + \lambda x \qquad \Longrightarrow \qquad v_{rr} + G(r, s, v, v_r, v_s) = 0$$
$$s(x,y) = \alpha x \quad \alpha \neq 0$$

Forma canónica de la ec. parabólica

si $\Delta < 0 \Rightarrow \lambda_1 \wedge \lambda_2$ son complejos

$$\overline{\lambda_1} = \lambda_2 \qquad \lambda_1 = \frac{b}{a} - \sqrt{ac-b^2}\, i$$

$$\begin{array}{rl} & y + \lambda_1 x = r + is \\ + & y + \overline{\lambda_1} x = r - is \\ \hline & 2y + 2\,\mathrm{Re}(\lambda_1)\, x = 2r \end{array}$$

$$\Rightarrow y + \mathrm{Re}(\lambda_1) x = r$$

$$\mathrm{Im}(\lambda_1) x = s$$

$$\Rightarrow y + \frac{b}{a} x = r \quad y \quad -\sqrt{ac-b^2}\, x = s$$

La formula canonica en este caso es

$$V_{rr} + V_{ss} = G(r, s, V, V_r, V_s)$$

EDOS

Definición

- Noemi Wolansky ODEs
- Alesio Figalli Analisis I

Definición

Una EDO es una relación de la forma

$$F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$$

para la función desconocida $x \in C^n(I)$ donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto. Aquí $F\colon U \to \mathbb{R}$ es una función, $U \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ es un conjunto abierto y $x', \dots, x^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$ son las derivadas ordinarias de x.
El orden de la derivada más alta que aparece en F se denomina el orden de la ecuación.
Si la función F es lineal en x y sus derivadas la ecuación se dice lineal.
En caso contrario se dice no lineal.

Aplicación

Ley de Enfriamiento de Newton

"La tasa de pérdida de calor de un cuerpo es directamente proporcional a la diferencia entre las temperatura del cuerpo y la del entorno que lo rodea"

$$T' = -k\,(T - T_{en})$$

k constante positiva

Temperatura del entorno

Temperatura del cuerpo

EDOS

Separación de varialBes

$x' = x^2 t$

$\hookrightarrow \dfrac{x'}{x^2} = t \Longrightarrow -\dfrac{1}{x} = \dfrac{t^2}{2} + C \Longrightarrow -\dfrac{1}{x(0)} = C \Longrightarrow C = -1$

$\Longrightarrow x(t) = \dfrac{2}{2 - t^2}$

Ejemplo. Resolver

$$\begin{cases} x' = x^2 t, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Sino tenemos este dato tenemos infinitas soluciones

Verifico $\dot{x} = \dfrac{4t}{(2-t^2)^2} = x^2 t$

$I_{max} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ $\boxed{\text{solución única}}$

EDOS
Separació n de varialBes

Supongamos que la ecuació n tiene la forma

$$x' = f(x)g(t)$$

entonces, si $f(x) \neq 0$ tenemos que

$$\frac{x'}{f(x)} = g(t) \Longrightarrow \int \frac{x'(t)}{f(x(t))} dt = \int g(t) dt$$

entonces

$$F(x(t)) = G(t) + C$$

donde

$$G(t) = \int g(t) dt \text{ y } F(s) = \int \frac{ds}{f(s)}.$$

(1) $x \equiv 0$ es solución en todo $\mathbb{R}$

EDOS

Separación de varialBes

(2) $x' = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{x'}{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{x} = t + c \Rightarrow c = 0$

$x' = \frac{t}{2} = \sqrt{x}$ pero en $[0, +\infty)$

$\Rightarrow x(t) = t^2/4$

Ejemplo. Resolver

$$\begin{cases} x' = \sqrt{x}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Si tomo

$$x(t) = \begin{cases} t^2/4 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Tengo una solución en todo $\mathbb{R}$

no tengo unicidad de la solución

EDOS

Existencia y unicidad

Nuestro primer gran objetivo es mostrar resultados de existencia y unicidad local de solución para una ecuación de la forma

$$x' = f(t, x)$$

EDOS

Existencia y unicidad

Ej ① $f(t,x) = x^2 t$ es localmente lipschitz en x

② $f(t,x) = \sqrt{x}$ no es localmente lipschitz en 0

Definición

Sean I y J dos intervalos de la recta. Decimos que una funcion $f : I \times J \to \mathbb{R}$ es Lipschitz en la variable x si f es continua y existe una constante L talque

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|.$$

La constante L se suele denominar la constante de Lipschitz de f.
Decimos que una funcion f es localmente Lipschitz en la variable x si f es Lipschitz en $I' \times J'$ para todo I', J' intervalos cerrados y acotados contenidos en I y en J respectivamente.

EDOS

Existencia y unicidad

Cauchy-Lipschitz

Teorema (Existencia).

Sean I un intervalo de la recta y $f(t,x)$ una función Lipschitz en la variable x en $I \times \mathbb{R}$. Si t_0 es un punto interior de I y $y \in \mathbb{R}$ existe $\delta > 0$ y una función continuamente diferenciable $x\colon [t_0-\delta, t_0+\delta] \subset I \to \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} x' = f(t,x) & \text{en } (t_0-\delta, t_0+\delta), \\ x(t_0) = y. \end{cases}$$

Se tiene resultados análogos si t_0 es uno extremo del intervalo I.

D/ Supongamos que $x(t)$ es una solución del problema. Entonces si integramos la ecuación diferencia tenemos

$$(1)\quad x(t) = y + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \quad \forall t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$$

Observemos que si x es una función cont en $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ y es solución de (1) entonces x es cont. diferenciable y $x' = f(t,x)$. Por otro lado, evaluando (1) en $t = t_0$ podemos ver que $x(t_0) = y$

Es decir, probamos que X es solución de nuestra EDO si y solo si es solución de (1)

Vamos a buscar una solución de (1)

Para eso vamos a utilizar el teor de punto fijo.

Iteración de Picard

Definimos

$$x_0(t) = y$$
$$x_{n+1}(t) = y + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))\, ds$$

Podemos observar varias cosas

1. Como $x_0 \in C'$ tenemos que $x_n \in C'$ para todo $n \geq 0$

2. Si podemos probar que $\exists \delta > 0 / x_n \rightrightarrows x_\infty$ en $[t_0-\delta, t_0+\delta]$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_n = y + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))\, ds \\ \downarrow \qquad\qquad\qquad\quad \downarrow \\ x_\infty = y + \int_{t_0}^{t} f(s, x_\infty(s))\, ds \end{cases}$$

Es decir x_∞ es una solución de 1

Veamos la convergencia

Sea L la constante de Lipschitz de f

Tomemos $\delta = \frac{1}{2L}$. Veamos que x_n converge uniformemente en $[t_0-\delta, t_0+\delta]$

Definimos $v_n = x_n - x_{n-1}$

$$\Rightarrow x_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n} v_n$$

Vamos a ver que la serie converge absolutamente a $x_\infty = \xi + \sum_{k=1}^{\infty} v_n$ en el intervalo $[t_0-\delta, t_0+\delta]$, de manera que

- X_∞ esta bien definida en $[t_0-\delta, t_0+\delta]$
- $X_n \rightrightarrows X_\infty$ en $[t_0-\delta, t_0+\delta]$

Para probar esto, observemos que

$$|v_{n+1}(t)| = |X_{n+1}(t) - X_n(t)|$$
$$= \left| \int_{t_0}^{t} \left[f(s, X_n(s)) - f(s, X_{n-1}(s)) \right] ds \right|$$
$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} | f(s, X_n(s)) - f(s, X_{n-1}(s)) | \, ds \right|$$

$$\Rightarrow |v_{n+1}(t)| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} |x_n(s) - x_{n-1}(s)|\, ds \right|$$

$$\leq L \left| \int_{t_0}^{t} |v_n(s)|\, ds \right|$$

para todo $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ y $n \geq 1$

si $a_n = \max \{ |v_n(t)| : t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \}$

$L\delta = 1/2$

tenemos que

$$|v_{n+1}(t)| \leq L\, a_n |t - t_0| \leq L\, a_n \delta \leq \frac{a_n}{2}$$

para todo $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ y $n \geq 1$

$\Rightarrow a_{n+1} \leq \frac{a_n}{2} \quad \forall n \geq 1$

$\Rightarrow a_{n+1} \leq \frac{a_1}{2^n} \quad \forall n \geq 1$ (Inducción)

Entonces por el criterio de mayoración la serie converge absolutamente en $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ y por lo tanto

$$x_\infty = y + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$ está bien def

en $[t_0-\delta, t_0+\delta]$

Para terminar veamos que $x_n \rightrightarrows x_\infty$ en $(t_0-\delta, t_0+\delta)$

$$|x_\infty - x_n| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k| \leq a_1 \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{k-1} = a_1 2^{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

no depende de t ■

Comentario: Iterando este proceso uno puede mostrar que tiene solución en todo I xq f es Lipschitz respecto a la 2^{do} variable en todo $I \times \mathbb{R}$

EDOS

Existencia y unicidad

Teorema (Continuidad respecto a los datos iniciales).

Sean I un intervalo de la recta, $f(t,x)$ una función Lipschitz en la variable x en $I \times \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ y $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ y $x_1, x_2 \colon [t_0, r] \to \mathbb{R}$ son soluciones de

$$x' = f(t,x) \text{ en } (t_0, r),$$

con $x_i(t_0) = y_i \ \ i = 1, 2$. Entonces existe $C = C(r)$ tal que

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq C|y_1 - y_2| \quad \forall t \in [t_0, r].$$

Se tiene el mismo resultado si $x_1, x_2 \colon [r, t_0] \to \mathbb{R}$ son soluciones de $x' = f(t,x)$ en (r, t_0), con $x_i(t_0) = y_i \ \ i = 1, 2$.

D/ sabemos que

$$x_1(t) = y_1 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s))\, ds$$

$$-$$

$$x_2(t) = y_2 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_2(s))\, ds$$

$$x_1(t) - x_2(t) = y_1 - y_2 + \int_{t_0}^{t} [f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))]\, ds$$

$$\Rightarrow |x_1(t) - x_2(t)| \leq |y_1 - y_2| + L\int_{t_0}^{t} |x_1(s) - x_2(s)|\, ds \quad (*)$$

Donde L es la constante de Lipschitz de f.

EDOS

Existencia y unicidad

Ahora Usamos el

Lema (Gronwall).

Sea $g \geq 0$ continua en un intervalo I que contiene a t_0. Si existe dos constantes A y B tales que

$$g(t) \leq A + B \left| \int_{t_0}^{t} g(s) ds \right| \quad \forall t \in I,$$

se sigue que

$$g(t) \leq A e^{B|t-t_0|} \quad \forall t \in I.$$

Queda de ejercicio

Entonces por Gronwall y * resulta que

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |y_1 - y_2| \, e^{L(t-t_0)}$$

$$\leq |y_1 - y_2| \, e^{L(r-t_0)}$$

Como corolario de este resultado podemos deducir la unicidad de la solución

EDOS

Existencia y unicidad

Teorema (Unicidad).

Sean I un intervalo de la recta, $f(t,x)$ una funció n Lipschitz en la variable x en $I \times \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ y $J_1, J_2 \subset I$ intervalos tales que $t_0 \in J_1 \cap J_2$. Si $x_i : J_i \to \mathbb{R}$ es solucion de

$$\begin{cases} x' = f(t,x) & \text{en } J_i^o, \\ x(t_0) = y, r & \end{cases}$$

para todo $i = 1, 2$, entonces $x_1 = x_2$ en $J_1 \cap J_2$.

Calculo de Variaciones

Introducción Buttazzo-Giaquinta-Hildebrant

El calculo de variaciones clásico consiste en minimizar expresiones de la forma

$$\mathcal{I}(u) = \int_a^b F(t, u, \dot{u})dt$$

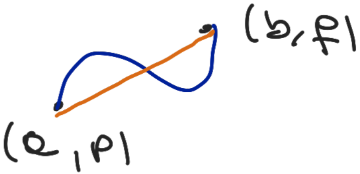
donde $F\colon [a,b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función dada. Buscamos una función $u\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ que minimize $\mathcal{I}$ sobe una clase especifica de funciones, por ejemplo

$$\mathcal{A} := \{v \in C^2([a,b], \mathbb{R}^N)\colon v(a) = x, v(b) = y\}.$$

A la funcion F se la suele llamar Lagrangeano y se Denota con L en lugar de con F.

Calculo de Variaciones

Introducción



Ejemplo. Supongamos que queremos minimizr la longitud de arco de una función $u\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $u(a) = p$ y $u(b) = q$, es decir queremos minimizar la longitud de la curva $(t, u(t))$ a lo largo de todas la curvas regulares que unen (a,p) con (b,q). Esto nos da el siguiente problema

longitud de arco

$$\min_{u \in \mathcal{A}} \int_a^b \sqrt{1+\dot{u}^2}\,dt \quad \text{donde } \mathcal{A} := \{v \in C^2([a,b],\mathbb{R}^N)\colon v(a) = p, v(b) = q\}.$$

En este caso es claro que la solución es la linea recta que une p con q, es decir que $\ddot{u} \equiv 0$.

$$u(t) = \frac{f-p}{b-a}(t-a) + p$$

$$\dot{u}(t) = \frac{f-p}{b-a}$$

$$\int_a^b \sqrt{1+\dot{u}^2(t)}\, dt = \sqrt{(b-a)^2 + (f-p)^2}$$

Si $v \in A$

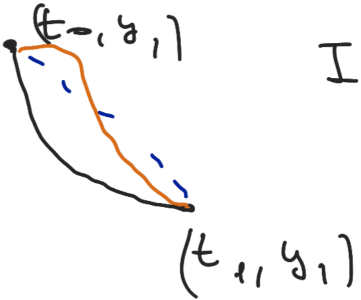
$$(b-a)^2 + (f-p)^2 = \int_a^b (b-a, p-p)\cdot(1; \dot{v})\, dt$$

$$\leq \sqrt{(b-a)^2+(p-\rho)^2}\int_a^b \sqrt{1^2+\dot{v}^2}\,dt$$

$$\Rightarrow \sqrt{(b-a)^2+(\rho-p)^2} \leq \int_a^b \sqrt{1+\dot{v}^2}\,dt$$

para todo $v \in A$

Dejo caer un objeto por la acción de la gravedad del punto



$$I(u) = \int_c \frac{ds}{V}$$

El tiempo transcurrido

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+\dot{u}^2}}{v}\, dt$$

Donde v es la velocidad de objeto

Podemos asumir que $v=\sqrt{2gu}$

Leyes de Newton de la dinámica

Calculo de Variaciones

Introducción

Buscamos el min I en un cjto apropiado

Ejemplo. Históricamente, el cálculo de variaciones se inició con el llamado Problema de la braquistocrona planteado por Johann Bernoulli. Aquí se quiere conectar dos puntos (t_0, y_0) y (t_1, y_1) en $\mathbb{R}^2$ por una curva tal que una partícula que obedece la ley de gravitación de Newton y se mueve sin fricción recorre la distancia entre esos puntos de la manera más rápida posible. Después de caer de la altura y, la partícula tiene velocidad $(2gy)^{\frac{1}{2}}$ donde g es la aceleración gravitacional. El tiempo que la partícula necesita para recorrer el camino $y = u(t)$

$$\mathcal{I}(u) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\frac{1 + \dot{u}^2}{2gu}}\, dt$$

Braquistocrona

Despues volvemos al problema

Consideremos el funcional

$$\mathcal{I}(u) = \int_I F(t, u(t), u'(t))\, dt$$

Se denomina el Lagrangiano

Integral Variacional

Por lo general $I = (a,b)$ en $\mathbb{R}$

Por simplicidad vamos a asumir que $F \in C^1(I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ (puede ser mucho

Entonces $\mathcal{I}$ está bien definida para cualquier $u \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$.

En general vamos a considerar $\mathcal{I}$ solo sobre un "entorno" de una función u.

Entonces es suficiente asumir que $\mathcal{L} \in C^1(U)$ donde U denota un abierto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ conteniendo el gráfico $\{(t, u(t), u'(t)) : t \in \bar{I}\}$

Entonces $\mathcal{I}(v)$ esta definida para todo $v \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^N)$ tq $\|v-u\|_{C^1(I)} < \varepsilon$ para algun ε lo suficientemente chico

Entonces

$$\Phi(r) := \mathcal{I}(u + r\varphi)$$

esta definida para toda $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ y p/ $|r| < \varepsilon_0 = \dfrac{\varepsilon}{\|\varphi\|_{C^1(J)}}$

Además $\Phi \in C^1(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ y

$$\Phi'(0) = \int_I \{ F_z(t,u,u')\varphi + F_p(t,u,u')\cdot\varphi' \} dt$$

$$=: \delta \mathcal{I}(u,\varphi)$$ la primera variación de $\mathcal{I}$ en u en la dirección φ

Obs $\delta \mathcal{I}(u,\varphi)$ es lineal en φ.

Calculo de Variaciones

Extremales débiles

Definición.

Una función $u \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ se dice una extremal débil de $\mathcal{I}$ si

$$\int_I [F_z(t,u,u')\varphi + F_p(t,u,u')\varphi']\, dt = 0$$

$$\Phi'(0) = \lim_{r \to 0} \frac{\Phi(u+r\varphi) - \Phi(u)}{r}$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R}^N)$.

Esto nos dice que u es un punto estacionario de $\tilde{\mathcal{I}}$ p/toda posible dirección

Calculo de Variaciones

Minimizantes débiles

Definición.

Una función $u \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ se dice una minimizante débil de $\mathcal{I}$ si

$$\mathcal{I}(u) \leq \mathcal{I}(u + r\varphi)$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R}^N)$ con $\|\varphi\|_{C^1(I)} < \varepsilon \ll 1.$