Calculo de Variaciones

Minimizantes débiles

Proposición.

Si $u \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ es minimizante débil de $\mathcal{I}$ entonces u es un extremal debil de $\mathcal{I}$.

Calculo de Variaciones

Lema fundamental

Lema.

$C(I)$

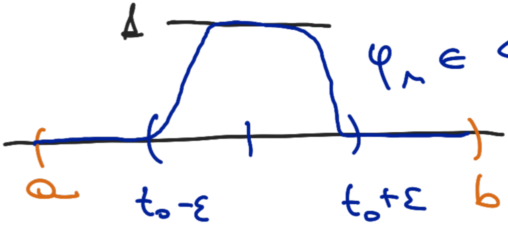
Si $h \in$ [redacted] satisface

I

$$\int_a^b h(t)\varphi(t)dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\text{[redacted]})$$

entonces $h \equiv 0$ en [redacted]. I

D/ Sea $t_0 \in I$ y $\varepsilon > 0$ tq $I_0 = (t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon) \subset\subset I$



$\varphi_n \in C_c^\infty(I)$ tq

$\varphi_n \longrightarrow \chi_{I_0}$ en L^2

$$0 = \int_{I_0} h\,\varphi_n\,dt \longrightarrow \int_{I_0} h\,dt$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} h(t)\,dt \longrightarrow h(t_0) = 0 \qquad \blacksquare$$

<u>Tarea</u> Si $h \in L^1(I)$ y

$$\int h(t)\varphi(t)\,dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I)$$

entonces $h = 0$ a.e. I.

Calculo de Variaciones

Ecuación de Euler-Lagrange

Teorema.

Sean $u\colon I \to \mathbb{R}^N$ un extremal débil de $\mathcal{I}$. Si $u \in C^2(I, \mathbb{R}^N)$ y $F \in C^2(U)$ donde U es un entorno del $\{(t, u(t), u'(t))\colon t \in \bar{I}\}$, entonces u es una solución del siguientes sistema de ecusciones ordinarias de segundo orden, llamado la la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}(F_p(t, u, \dot{u})) - F_u(t, u, \dot{u}) = 0$$

D/ Como u es un extremal débil de I para todo $\varphi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R}^N)$ tenemos que

$$0 = \int_I \left(F_z(t,u,u')\varphi + F_p(t,u,u')\varphi'\right)dt$$

$$= \int_I \left(F_z(t,u,u') - \frac{\partial}{\partial t} F_p(t,u,u')\right)\varphi \, dt$$

$\Longrightarrow$ Lema Fundamental

$$F_z(t,u,u') - \frac{\partial}{\partial t} F_p(t,u,u') = 0$$

Volvamos al problema de la braquistócrona

$$\min_{u \in A} I(u) \quad \text{donde } I(u) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{t_1} \sqrt{\frac{1+\dot{u}^2}{u}}\, dt$$

y $A = \{ u \in C^1[0, t_1] : u(0) = 0 \quad u(t_1) = y_1 \}$

$$F(u, \dot{u}) = \sqrt{\frac{1+\dot{u}^2}{u}} \longrightarrow \frac{\partial F}{\partial p} = \frac{\dot{u}}{\sqrt{(1+\dot{u}^2)\, u}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{-\sqrt{1+\dot{u}^2}}{\frac{1}{2} \quad u^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)' = \frac{\partial F}{\partial z} \Rightarrow \left(\frac{\dot{u}}{\sqrt{(1+\dot{u}^2)\, u}}\right)' = -\sqrt{\frac{1+\dot{u}}{4u^3}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{\dot u}{\sqrt{u(1+\dot u^2)}}\right)' \frac{\dot u}{\sqrt{u(1+\dot u^2)}}}_{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\dot u}{\sqrt{u(1+\dot u^2)}}\right)^2\right]'} = \underbrace{-\frac{\dot u}{2u^2}}_{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{u}\right]'}$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\dot u}{\sqrt{u(1+\dot u^2)}}\right)^2\right]' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{u}\right]'$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u} = \frac{(\dot u)^2}{u(1+(\dot u)^2)} + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u(1+(\dot u)^2)} = C = \frac{1}{k^2} \Rightarrow u(1+(\dot u)^2) = k^2$$

$$\Rightarrow \quad \dot{u} = \sqrt{\frac{k^2 - u}{u}}$$

$$\Rightarrow \quad dt = \sqrt{\frac{u}{k^2 - u}}\, du$$

$$u = k^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{k^2}{2}(1 - \cos\theta)$$

$$t = \left(\frac{k^2}{2}\right)(\theta - \operatorname{sen}\theta) + C$$

$$t = 0 \longrightarrow \begin{array}{l} 0 = \left(\frac{k^2}{2}\right)(\theta_0 - \operatorname{sen}\theta_0) + C \\ 0 = u(0) = \frac{k^2}{2}(1 - \cos\theta_0) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \theta_0 = 0 \\ C = 0 \end{array}$$

$$t = t_1 \longrightarrow \begin{array}{l} t_1 = (k^2/2)^2(\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_1) \\ y_1 = (k^2/2)^2(1 - \cos\theta_1) \end{array}$$

Encontramos una unica sol. de nuestra ec.

¿Es un minimizante de nuestro problema?

La condicion es necesaria pero no suficiente

Ej

$$\underset{u\in A}{\inf}\ \cancel{\min} \int_0^1 e^{-\dot{u}^2}\,dt \qquad A=\{u\in C^1[0,1]: u(0)=u(1)=0\}$$

En este caso no se alcanza

$$I(u)=\int_0^1 e^{-\dot{u}^2}\,dt \geq 0$$

$$I(0)=1$$

$$F(t,u,\dot{u})=e^{-\dot{u}^2} \Rightarrow \frac{d}{dt}F_p(t,u,\dot{u})=0$$

$$\Rightarrow \dot{u}=0 \Rightarrow u=ct$$

$$\Rightarrow u=0$$

$u_n(t) = n(t-1/2)^2 - \frac{n}{4} \in A$

$\dot{u}_n(t) = 2n(t-1/2)$

$$\Rightarrow I(u) = \int_0^1 e^{4n^2(t-1/2)^2}\, dt = \frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} e^{-r^2}\, dr \longrightarrow 0$$

$r = 2n(t-1/2)$

Luego no existe el minimizante.

Calculo de Variaciones

Ecuación de Euler-Lagrange

Teorema.

Sean $F \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ y $u \in C^2([a,b], \mathbb{R}^N)$ tal que $u(a) = x$ y $u(b) = y$. Si $(z,p) \to F(t,z,p)$ es convexa para todo $t \in [a,b]$ y u es solución de

$$\frac{d}{dt}(F_p(t,u,\dot{u})) - F_u(t,u,\dot{u}) = 0$$

entonces u es un minimizante de

$$\min_{v \in \mathcal{A}} \int_a^b F(t,v,\dot{v})dt \text{ donde } \mathcal{A} := \{v \in C^1([a,b], \mathbb{R}^N) \colon v(a) = x, v(b) = y\}.$$

D/ Para todo $v \in A$

$$F(t,v,\dot v) \geq F(t,u,\dot u) + F_z(t,u,\dot u)(v-u) + F_p(t,u,\dot u)(\dot v - \dot u)$$

Como $(u-v)(a) = (v-u)(b) = 0$ integrando y haciendo partes tenemos que

$$\underbrace{\int_a^b F(t,v,\dot v)\,dt}_{I(v)} \geq \underbrace{\int_a^b F(t,u,\dot u)\,dt}_{I(u)} + \underbrace{\int_a^b \left[F_z(t,u,\dot u) - \frac{d}{dt}F_p(t,u,\dot u)\right](v-u)\,dt}_{=0}$$

El problema isoperimetrico

X el conjunto de todas las curvas cerradas de longitud L

¿Cuál es la curva de X que encierra área máxima?

$C \in X \qquad C = \mathrm{Im}\,\sigma \qquad \sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$L = \int_a^b \sqrt{\dot{x} + \dot{y}}\, dt \qquad \sigma(t) = (x(t), y(t))$$

$$\max_{C\in X} A(C) = \max_{\operatorname{Im}\sigma\in C} I(\sigma)$$

$$I(\sigma) = \frac{1}{2}\int_a^b (x\dot{y} - \dot{x}y)\,dt$$

Pasando en limpio, queremos

$$\max \frac{1}{2}\int_a^b (x\dot{y} - \dot{x}y)\,dt$$ bajo la restricción

$$L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$$

Multiplicadores de Lagrange

Definimos $H_\lambda(\sigma) = \int_a^b \left[\frac{1}{2}(x\dot y - \dot y x) + \lambda\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}\right] dt$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_\lambda}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial H_\lambda}{\partial \dot x}\right) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial H_\lambda}{\partial y} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial H_\lambda}{\partial \dot y}\right) = 0 \end{cases}$$

Entonces

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\dot{y} - \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}y + \frac{\lambda \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right) = 0 \\ -\frac{1}{2}\dot{x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\lambda \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - \frac{\lambda \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = c_1 \Rightarrow y - c_1 = \frac{\lambda \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \\ x + \frac{\lambda \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = c_2 \Rightarrow x - c_2 = \frac{\lambda \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (x-c_2)^2+(x-c_2)^2=1^2$$

$$\Rightarrow L = 2|\lambda|\pi \Rightarrow |\lambda| = \frac{2\pi}{L}$$

Dado $I \in C^2[a,b] \to \mathbb{R}$ un funcional de la forma

$$I(u)=\int_a^b F(t,u,u')dt$$

donde F es una funcion suave. El problema isoperimetrico consiste en determinar los extremales de I sobre las u que satisfacen

$$u(a) = c \quad y \quad u(b) = d$$

y la restricción

$$J(y) = \int_a^b G(t, u, \dot{u})\, dt = L$$

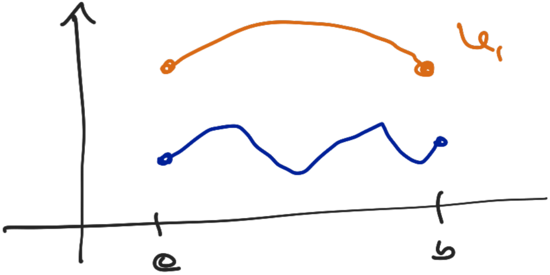
donde G es una función dada y L una constante específica.

Problema extremos libre

Hallar u que minimiza

$$I(u) = \int_a^b F(t, u, \dot{u})\,dt$$

Sujeto a $u \in C^1([a,b])$



$$J(u+\varepsilon\eta) = \int_a^b F(t, u+\varepsilon\eta, \dot{u}+\varepsilon\dot{\eta})\,dt$$

$$= \int_a^b \left(F(t,u,\dot{u}) + \varepsilon\eta \frac{\partial F}{\partial u} + \varepsilon\dot{\eta}\frac{\partial F}{\partial \dot{u}} + O(\varepsilon^2) \right) dt$$

$$\Rightarrow \frac{\partial J}{\partial \varepsilon} = \int_a^b \left(\eta \frac{\partial F}{\partial u} + \dot{\eta}\frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \right) dt$$

$$= \int_a^b \eta \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \right) dt + \eta \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \Big|_a^b$$

u minimizante $\Rightarrow \dfrac{\partial \mathcal{J}}{\partial \varepsilon} = 0$

Si $\eta(a) = \eta(b) = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial u} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial F}{\partial \dot{u}} = 0$ ①

Euler - Lagrange

Si $\dot{\eta}(a) = 0$ $\dot{\eta}(b) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial \dot{u}}(b, u(b), \dot{u}(b)) = 0$ ②

Si $\eta(a) \neq 0$ $\eta(b) = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial \dot{u}}(a, u(a), \dot{u}(a)) = 0$ ③

Entonces u tiene que cumplir ①, ② y ③

Ejemplo

$$\min_{u\in C^1([0,2])} \int_0^2 \underbrace{\left(\frac{1}{2}\dot{u}^2 + u\dot{u} + \dot{u} + u\right)}_{F(t,\dot{u},u)} dt$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial \dot{u}} = \dot{u} + 1 - \frac{d}{dt}\left(\dot{u} + u + 1\right)$$

$$= 1 - \ddot{u}$$

$$\Longrightarrow u(t) = \frac{t^2}{2} + \alpha t + \beta$$

$$0 = \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}\right|_{t=0} = \left.(\dot{u} + u + 1)\right|_{t=0} = \alpha + \beta + 1$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \dot{u}}\Big|_{t=2} = (\dot{u} + u + 1)\Big|_{t=2}$$

$$= 2 + \alpha + 2 + 2\alpha + \beta + 1$$

$$= 3\alpha + \beta + 5$$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 1 &= 0 \\ 3\alpha + \beta + 5 &= 0 \end{aligned} \implies \begin{aligned} \alpha &= -2 \\ \beta &= 1 \end{aligned}$$

$$\implies u(t) = \frac{t^2}{2} - 2t + 1$$

El método de separación de variables

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 \text{ en } \Omega \times (0,+\infty) \\ u(x,t) = 0 \text{ en } \partial\Omega \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = u_0 \text{ en } \Omega \end{cases}$$

La ecuación del calor homogénea

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto con $\partial\Omega$ suave

Proponemos como solución

$$u(x,t) = v(t)\,\omega(x)$$

donde $v \in C^1((0,+\infty),\mathbb{R})$, $\omega \in C(\Omega,\mathbb{R})$

La condición $u(x,t)=0$ en $\partial\Omega \times (0,+\infty)$ implica que $w=0$ en $\partial\Omega$. Por otro lado

$$0 = u_t - \Delta w \quad \text{en } \Omega \times (0,+\infty)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = V'(t)\, w(x) - V(t)\, \Delta w(x) \quad \text{en } \Omega \times (0,+\infty)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{V'(t)}{V(t)} = \frac{\Delta w(x)}{w(x)} \quad \text{en } \Omega \times (0,+\infty)$$

Si $V, w \neq 0$

$$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \frac{V'(t)}{V(t)} = \frac{\Delta w(x)}{w(x)} = -\lambda \quad \text{en } \Omega \times (0,+\infty)$$

$$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } \begin{cases} V'(t) = -\lambda V(t) & \text{en } (0,+\infty) \\ -\Delta w = \lambda w & \text{en } \Omega \end{cases}$$

Entonces $u(t) = c e^{-\lambda t}$ $c \in \mathbb{R}$ y w es una solución de

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda w & \text{en } \Omega \\ w = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

El problema de autovalores de Dirichlet para el Laplaciano

Estudiar este problema es uno de los objetivos de este curso, para estudiarlo en su totalidad necesitamos tiempo

Para simplificar el problema asumimos que $\Omega = (0, L)$

Entonces nuestro problema autovalores queda de la siguiente manera

$$\begin{cases} \ddot{w} + \lambda w = 0 \text{ en } (0,L) \\ w(0) = w(L) = 0 \end{cases}$$

Observar que el polinomio característico asociado a la ecuación es

$$r^2 + \lambda = 0$$

Si $\lambda < 0 \Longrightarrow w(x) = Ae^{-\sqrt{\lambda}x} + Be^{\sqrt{\lambda}x}$

$0 = w(0) = A + B$

$0 = w(L) = Ae^{-\sqrt{\lambda}L} + Be^{\sqrt{\lambda}L} \Longrightarrow A = B = 0 \Longrightarrow w = 0$

Si $\lambda = 0 \Rightarrow \omega = Ax + B$

$0 = \omega(0) = B$

$0 = \omega(L) = AL + B$

$\Rightarrow A = B = 0 \Rightarrow \omega = 0$

Si $\lambda > 0 \Rightarrow \omega(x) = a \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x) + b\cos(\sqrt{\lambda}x)$

raíces complejas

$0 = \omega(0) = b$

$0 = \omega(L) = a \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L)$

$\Rightarrow a = 0$ ✗

$\Rightarrow \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0$

$\Downarrow$

$\sqrt{\lambda}L = k\pi \quad k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lambda = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$

Entonces tengo una sucesión de soluciones de mi problema de autovalores

$$\omega_k(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \qquad k \in \mathbb{N}$$

Entonces

$$u_k(x,t) = e^{-\lambda_k t} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_k}\, x)$$
$$= e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

resuelve la ecuación del calor y además

$$u_k(x,t) = 0 \text{ en } \partial U \times (0, +\infty)$$

Falta que cumpla

$$u(x,0) = u_0(x) \text{ en } \Omega$$

Como la ec. de difusión es lineal propone-mos como solución

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x,t)$$

Si podemos elegir c_k de manera que

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x,0) = u_0(x) \text{ en } \Omega$
- Que la serie converja

Entonces podemos encontrar una solución para nuestro problema. Porque si la serie converge se puede intercambiar la diferenciación con la sumatoria

Lo que queremos es que

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Base ortogonal

¿Como tomamos los c_k p/q pase lo anterior?

Tarea $\displaystyle\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi}{L}x\right)dx = L\int_0^1 \operatorname{sen}(k\pi x)\operatorname{sen}(j\pi x)\,dx = \begin{cases} 0 & k\neq j \\ \frac{L}{2} & k=j \end{cases}$

Hint $\sin(k\pi x)\sin(j\pi x) = \dfrac{\cos(k\pi x - j\pi x) - \cos(k\pi x + j\pi x)}{2}$

Entonces

$$\int_0^L u_0(x)\sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right)dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_0^L \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right)dx = \frac{L}{2}c_j$$

Asumimos

$$\Rightarrow c_k = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)dx$$

Esto esta bien def si $u_0 \in L^1(0,L)$

$$\Rightarrow |c_k| < \frac{2}{e}\|u_0\|_{L^1(0,e)} < \infty$$

Tarea mostrar que $u \in C^\infty([0,\ell]\times[\delta,\infty))$ para todo $\delta > 0$, sus derivadas se calculan derivando término a término la serie

Lo complejo

$$\lim_{\substack{y \to x \\ t \to 0}} u(y,t) = u_0(x)$$

Vamos a necesitar más regularidad

Hint: Criterio de Weirstrass