Criterio de Weierstrass

Sea f_n una sucesión de funciones de variable real o compleja definida en un conjunto A. Si para cada n $\exists M_n \geq 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M_n$ $\forall x \in A$ y $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en A

El método de separación de variables

Espacios de Hilbert

Definición.

Sea H un espacio vectorial. Un producto interno en H es una aplicación

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$$

tal que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es simétrica, bilineal y definida positiva.

El método de separación de variables

Espacios de Hilbert

Definición.

Sea H un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Entonces la aplicación

$$\| \cdot \| : H \to \mathbb{R}, \quad \|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

define una norma en H.

Ej $\mathbb{R}^n$

$L^2(\Omega) \longrightarrow \langle f, g \rangle = \int f g \, dx.$

El método de separación de variables

Espacios de Hilbert

Proposición (Desigualdad de Cauchy-Schwarz).

Sea H un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y norma $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$. Entonces

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\| \quad \forall x, y \in H.$$

D/ suponemos $x, y \neq 0$ si no es trivial.

observemos que

$$0 \leq \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \Rightarrow \langle x, y \rangle \leq \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2}$$

Por otro lado

$$0 \leq \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

$$\Rightarrow -\langle x, y\rangle \leq \frac{\|x\|^2+\|y\|^2}{2}$$

$$\therefore |\langle x, y\rangle| \leq \frac{\|x\|^2+\|y\|^2}{2}$$

Entonces

$$|\langle x, y\rangle| = |\langle \lambda x, \lambda^{-1} y\rangle| \leq \frac{\lambda^2 \|x\|^2}{2} + \frac{\|y\|^2}{2\lambda^2} \quad \forall \lambda \neq 0$$

Tomo $\lambda^2 = \dfrac{\|y\|}{\|x\|}$ y tengo la desigualdad $\blacksquare$

El método de separación de variables

Espacios de Hilbert

Definición.

Sea H un espacio vectorial con producto interno. Diremos que H es un espacio de Hilbert si H es completo, es decir, si para toda sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de elementos de H tal que

$$\|x_k - x_j\| \to 0 \quad \text{cuando } j, k \to \infty$$

se tiene que existe $x \in H$ tal que

$$\|x_k - x\| \to 0 \quad \text{cuando } k \to \infty.$$

Ej $\mathbb{R}^n$, $L^2(\Omega)$, ℓ^2

El método de separación de variables

Espacios de Hilbert

Definición.

Sea H un espacio de Hilbert y $\mathcal{B} \subset H$. Decimos que $\mathcal{B}$ es un sistema ortonornal si

$$\|x\| = 1 \quad \forall x \in \mathcal{B}$$

y

$$\langle x, y\rangle = 0 \quad \forall x, y \in \mathcal{B} \text{ con } x \neq y.$$

El método de separación de variables

Espacios de Hilbert

Ejemplo. Sean para $n \in \mathbb{N}$

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\ell}}, \ \phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \cos\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right), \ \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right).$$

Entonces $\{\phi_0, \phi_n, \psi_n\}$ es un sistema ortonormal en $L^2([-\ell, \ell])$.

El método de separación de variables

Serie de Fourier

Definición.

Sean H un espacio de Hilbert y $\mathcal{B} = \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormal de H. Dada $f \in H$ se define la serie de Fourier de f como la expresión formal

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n \quad \text{con} \quad c_n = \langle f, \phi_n\rangle \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

El método de separación de variables

Serie de Fourier

Lema (Desigualdad de Besel).

Sean H un espacio de Hilbert, $\mathcal{B} = \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormal de H y $f \in H$. Entonces

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{N} c_n^2 = \sum_{n=1}^{N} \langle f, \phi_n \rangle^2 \leq \|f\|^2$$

El método de separación de variables

Serie de Fourier

Notación.

Dada $f \in H$ notamos por $S_N(f)$ a la suma parcial de la serie de Fourier de f

$$S_N(f) := \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n.$$

D/ $0 \leq \|f - S_N\|^2 = \|f\|^2 - 2\sum_{i=1}^{N} \langle f, \phi_n \rangle^2 + \sum_{n=1}^{N} \langle f, \phi_n \rangle^2$

$\|\phi_n\|^2 = 1$, $\phi_n \cdot \phi_m = 0$ si $n \neq m$

$\Rightarrow 0 \leq \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{N} \langle f, \phi_n \rangle^2$

El método de separación de variables

Serie de Fourier

Proposición.

Sean H un espacio de Hilbert, $\mathcal{B} = \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormal de H y $f \in H$. Entonces

$$\|f - S_N(f)\| \leq \left\| f - \sum_{n=1}^{N} d_n \phi_n \right\| \quad \forall \{d_n\}_{n=1}^{N} \subset \mathbb{R}$$

D/ $\langle f - S_N(f), \phi_n \rangle = 0 \quad \forall n = 1, \dots, N$

$\Rightarrow \langle f - S_N(f), x \rangle = 0 \quad \forall x \in \text{gen}\{\phi_1, \dots, \phi_N\} = \mathcal{G}$

si $x \in \mathcal{G} \Rightarrow S_N(f) - x \in \mathcal{G}$

$\Rightarrow 0 = \langle f - S_N(f), x - S_N(f) \rangle$

$$\|f - S_N(f)\|^2 - \|f - x\|^2 = \cancel{\|f\|^2} - 2\langle f, S_N(f) \rangle + \|S_N(f)\|^2$$
$$- \cancel{\|f\|^2} + 2\langle f, x \rangle - \|x\|^2$$
$$= 2\langle f, x - S_N(f) \rangle + \|S_N(f)\|^2 - \|x\|^2$$
$$= 2\langle S_N(f), x - S_N(f) \rangle + \|S_N(f)\|^2 - \|x\|^2$$

$$\Rightarrow \|f - S_N(f)\|^2 - \|f - \alpha\|^2 = 2\langle S_N(f), \alpha\rangle - \|S_N(f)\|^2 - \|\alpha\|^2$$

$$= -\|S_N(f) - \alpha\|^2$$

$$\le 0 \quad \blacksquare$$

El método de separación de variables

Serie de Fourier

Definición.

Sean H un espacio de Hilbert y $\mathcal{B} = \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormal de H. Diremos que:

- $\mathcal{B}$ es completo si
$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n \quad \forall f \in H.$$
- $\mathcal{B}$ es cerrado si
$$\langle f, \phi_n \rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow f \equiv 0.$$

El método de separación de variables

Serie de Fourier

Proposición.

Sean H un espacio de Hilbert y $\mathcal{B} = \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormal de H. Entonces $\mathcal{B}$ es completo si y sólo si es cerrado.

Ejercicio

El método de separación de variables

Serie de Fourier

Ejemplo. Sean para $n \in \mathbb{N}$

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\ell}},\ \phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right),\ \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right).$$

Entonces $\{\phi_0, \phi_n, \psi_n\}$ es un sistema ortonormal completo en $L^2([-\ell, \ell])$.

El método de separación de variables

Convergencia puntual de la serie de Fourier

Lema (Lema de Riemann-Lebesgue).

Sea $f \in L^1([-\ell, \ell])$. Entonces se tiene

$$\left| \int_{-\ell}^{\ell} f(x)\phi_n(x)dx \right| + \left| \int_{-\ell}^{\ell} f(x)\overset{\psi_n}{\cancel{\phi_n}}(x)dx \right| \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

D/ Lo hacemos p/ ϕ_n. Para ψ_n es análogo

1° $f \in C_c^1([-e,e])$

$$\int_{-e}^{e} f(x)\,\phi_n(x)\,dx \underset{\text{Partes}}{=} -\frac{\sqrt{e}}{n\pi}\int_{-e}^{e} f'(x)\,\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{e}x\right)dx$$

$$\Rightarrow \left|\int_{-e}^{e} f(x)\,\phi_n(x)\,dx\right| \leq \frac{\sqrt{e}}{n\pi}\,\|f'\|_{L^1([-e,e])} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

2 $f \in L^1([-e,e])$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists g \in C_c^1([-e,e])$ tq $\|f-g\|_{L^1([-e,e])} < \varepsilon$

Entonces

$$\left|\int_{-e}^{e} f(x)\,\phi_n\,dx\right| \leq \left|\int_{-e}^{e} g(x)\,\phi_n(x)\,dx\right| + \left|\int_{-e}^{e} (f(x)-g(x))\,\phi_n(x)\,dx\right|$$

$|\phi_n| \leq 1 \longrightarrow$
$$\leq \left|\int_{-e}^{e} g(x)\,\phi_n(x)\,dx\right| + \|f-g\|_{L^1([-e,e])}$$

$$\leq \left|\int_{-e}^{e} g(x)\,\phi_n(x)\,dx\right| + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\int_{-e}^{e} f(x)\,\phi_n(x)\,dx\right| \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \left| \int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,\phi_n(x)\,dx \right| = 0 \quad \blacksquare$$

Sea $f \in L^2([-\ell,\ell])$

$$S_N(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx$$

$n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) dx \quad n \in \mathbb{N}$$

Por lo que vimos

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$$

en $L^2([-\ell, \ell])$

$\times q$ $\{\phi_0, \phi_n, \psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un sistema ortogonal completo observemos que

$$S_N[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

$$= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\,dt + \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\sum_{n=1}^{N}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}t\right)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\right]dt$$

$$\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}(x-t)\right)$$

$$= \int_{-\ell}^{\ell} f(t)\left[\frac{1}{2\ell} + \frac{1}{\ell}\sum_{n=1}^{N}\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}(x-t)\right)\right]dt$$

$$\Rightarrow S_N(f) = f * K_N$$

donde $K_N(x) = \frac{1}{2\ell} + \frac{1}{\ell}\sum_{n=1}^{N}\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$

tomo $y = \frac{\pi}{\ell}(x-t)$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{y}{2}\right) K_N(x-t) = \left[\frac{1}{2\ell} + \frac{1}{\ell}\sum_{n=1}^{N}\underbrace{\cos(ny)\operatorname{sen}\left(\frac{y}{2}\right)}_{\frac{\operatorname{sen}((n+\frac{1}{2})y) - \operatorname{sen}((n-\frac{1}{2})y)}{2}}\right]$$

$$\Rightarrow 2\ell\, K_N(x-t)\cdot \operatorname{Sen}(y/2) =$$

$$= \operatorname{Sen}\left(\frac{y}{2}\right) + \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Sen}\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)y\right) - \operatorname{Sen}\left(\left(n-\tfrac{1}{2}\right)y\right)$$

$$= \operatorname{Sen}\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)y\right)$$

$$\Rightarrow K_N(x-t) = \frac{\operatorname{Sin}\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)y\right)}{2\ell \operatorname{Sin}\left(\frac{y}{2}\right)} = D_N(y)$$

Nucleo de Dirichlet

Observación

$$\int_{-\ell}^{\ell} D_N\left(\frac{\pi y}{\ell}\right) dy = \int_{-\ell}^{\ell} \left[\frac{1}{2\ell} + \frac{1}{\ell}\sum_{n=1}^{N} \cos\left(\frac{\pi y}{\ell}\right)\right] dy$$

$$= 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{\ell}\right)\Big|_{-\ell}^{\ell} = 1$$

Entonces

$$|f(x) - S_N(f)(x)| = \left| f(x) - \int_{-\ell}^{\ell} f(t)\, D_N\left(\frac{\pi}{\ell}(x-t)\right) dt \right|$$

$$= \left| \int_{-\ell}^{\ell} \left(f(x) - f(t)\right) D_N\left(\frac{\pi}{\ell}(x-t)\right) dt \right|$$

$$\underset{r = x-t}{=} \left| \int_{x-\ell}^{x+\ell} \left(f(x) - f(x-r)\right) D_N\left(\frac{\pi}{\ell} r\right) dr \right|$$

Si extendemos a f de manera periodica (de periodo 2ℓ) a todo $\mathbb{R}$ tenemos

$$= \left| \int_{-\ell}^{\ell} \left(f(x) - f(x-r)\right) D_N\left(\frac{\pi}{\ell} r\right) dr \right| =$$

$$= \left| \int_{-\ell}^{\ell} \underbrace{\frac{f(x)-f(x-r)}{2\sqrt{\ell}\,\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell}\frac{r}{2}\right)}}_{g(r)} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\ell}} \operatorname{sen}\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\ell} r\right)}_{\xi_N(r)} dr \right|$$

Tarea es un sistema ortonormal de $L^2([-\ell,\ell])$

Si $g \in L^1$ x el lema de Riemann-Lebesgue

Se sigue que $S_N(f)(x) \xrightarrow[N \to \infty]{} f(x)$

$g \in L^1([-\ell,\ell])$ resulta equivalente a

$$\int_{-\ell}^{\ell} \left| \frac{f(x)-f(x-r)}{r} \right| dr < \infty$$

El método de separación de variables

Convergencia puntual de la serie de Fourier

Definición

Decimos que una función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ verifica la condición de Dini en x si

$$\int_{-\ell} \left| \frac{f(x) - f(x-\tau)}{\tau} \right| d\tau < \infty$$

Ej $f \in C^{0,\gamma}(\mathbb{R})$ $\gamma \in (0,1]$ cumple Dini

El método de separación de variables

Convergencia puntual de la serie de Fourier

Teorema.

Sea $f \in L^1([-\ell, \ell])$ un función que satisface la condición de Dini en todo $x \in (-\ell, \ell)$. Entonces $S_N(f)$ converge puntualmente a f cuando $N \to +\infty$.

El método de separación de variables

Convergencia uniforme de la serie de Fourier

Teorema.

Sea $f \in AC([-\ell, \ell])$ tal que $f' \in L^2([-\ell, \ell])$ y $f(\ell) = f(-\ell)$. Entonces $S_N(f)$ converge uniformemente a f en $[-\ell, \ell]$ cuando $N \to +\infty$.

Recuerdo

$f:[-\ell,\ell]\to\mathbb{R}$ es absolutamente continua si existe $g\in L^1([-\ell,\ell])$ y $c\in\mathbb{R}$ tales que

$$f(x)=c+\int_{-\ell}^{x} g(t)\,dt \quad x\in[-\ell,\ell]$$

El conjunto de todas la funciones absolutamente continua se denota $AC([-\ell,\ell])$

- $AC([-\ell,\ell])\subset C([-\ell,\ell])$
- f es diferenciable en ctp y $f'(x)=g(x)$ ctp

D/ Observamos que

$$|f(x)-f(y)| \leq \int_x^y |f'(t)|dt \leq \|f'\|_{L^2} |x-y|^{1/2}$$

$f \in L^2$

$\Rightarrow f \in C^{0,1/2}([-l,l]) \Rightarrow f$ satisface la condición de Dini $\Rightarrow S_N(f)(x) \longrightarrow f(x) \ \forall x \in [-l,l]$

Por otro lado

$$f'(x) \sim \frac{\bar{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + \bar{b}_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

donde

$$\overline{a}_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f'(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx$$

$$= \frac{1}{\ell} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\Big|_{-\ell}^{\ell} + \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\frac{n\pi}{\ell}dx$$

$$= \frac{n\pi}{\ell} b_n$$

Analogamente $\overline{a}_0 = 0$ y $\overline{b}_n = -\frac{n\pi}{\ell} a_n$

Además por la desigualdad de Bessel

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (b_n^2 + a_n^2) = \frac{\ell^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \overline{a}_n^2 + \overline{b}_n^2 \leq \frac{\ell^2}{\pi^2}\|f'\|_{L^2([-\ell,\ell])} < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n| \frac{1}{n} < \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} < \infty$$

Análogamente $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$

$$\Rightarrow |S_N(f)| \leq \left|\frac{a_0}{2}\right| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| < \infty$$

$$\Rightarrow S_N(f) \rightrightarrows f \text{ en } [-l, l]$$

Por el criterio de Weierstrass

+ convergencia puntual

El método de separación de variables

Convergencia en L^2 de la serie de Fourier

Teorema.

El sistema $\{\phi_0, \phi_n, \psi_n\}$ es un sistema ortonormal completo en $L^2([-\ell, \ell])$. Lego para toda $f \in L^2([-\ell, \ell])$ se tiene que $S_N(f)$ converge en $L^2([-\ell, \ell])$ a f.

D/ Si $f \in L^2([-\ell,\ell]) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists g \in C_0^1([-\ell,\ell])$ tq

$$\|f-g\|_{L^2([-\ell,\ell])} < \varepsilon$$

Por el resultado anterior

$$S_N(g) \rightrightarrows g \text{ en } [-\ell,\ell]$$

$$\Rightarrow \|f - S_N(f)\|_{L^2([-\ell,\ell])} \leq \|f - S_N(g)\|_{L^2([-\ell,\ell])}!$$

Por la proposición de la pag 47

$$\leq \|f-g\|_{L^2([-\ell,\ell])} + \|g - S_N(g)\|_{L^2([-\ell,\ell])}$$

$$\leq \varepsilon + \sqrt{2\ell}\, \|g - S_N(g)\|_\infty$$

$$\Rightarrow \limsup_{N\to\infty} \|f - S_N(f)\|_{L^2([-\ell,\ell])} \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \|f - S_N(f)\|_{L^2([-\ell,\ell])} = 0$$

$$f \in L^2([0,\ell]) \Rightarrow \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0,\ell] \\ -f(-x) & \text{si } x \in [-\ell,0) \end{cases} \in L^2([-\ell,\ell])$$

Extiendo x imparidad.

$$\tilde{f}(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

Tarea ver que $a_n = 0 \ \forall \mathbb{N}_0$ y

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx$$

El método de separación de variables

Serie de senos

Teorema.

Sea $f \in L^2([0,\ell])$. Luego se tiene que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

donde los coeficientes bn se calculan como

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)dx.$$

y la igualdad se entiende en sentido $L^2([0,\ell])$. Más aún, si $f \in AC([0,\ell])$ con $f(0) = f(\ell) = 0$ y $f' \in L^2([0,\ell])$, entonces la convergencia es uniforme.

Retomemos la ecuación del Calor

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 \text{ en } \Omega \times (0, +\infty) & \text{①} \\ u(x,t) = 0 \text{ en } \partial\Omega \times (0, +\infty) & \text{②} \\ u(x,0) = u_0 \text{ en } \Omega & \text{③} \end{cases}$$

Tenemos como solución

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, e^{-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

$$c_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} u_0(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx$$

Si $u_0 \in L^2([0,\ell])$ ver que $u \in C^\infty([0,\ell]\times(0,\infty))$ y verifica 1 y 2

Vemos 3

Si $u_0 \in L^2([0,\ell]) \Rightarrow u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$ en el sentido de L^2. Entonces

$$u(x,t) - u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\left(e^{-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}t} - 1\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

$$\Rightarrow \|u(\cdot,t) - u_0\|^2_{L^2([0,\ell])} = \frac{\ell}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\left(e^{-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}t} - 1\right)^2$$

Identidad de Parseval

Además $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$ x la desigualdad de Bessel

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0$ tq si $N > N_0$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n^2 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \| u(\cdot,t) - u_0 \|^2_{L^2([0,\ell])} \leq \frac{\ell}{2} \sum_{n=1}^{N} c_n^2 \left(e^{\left(-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\right)} - 1 \right) + 2\ell\varepsilon$$

$$\left| e^{-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}} - 1 \right|^2 \leq 4$$

$$\Rightarrow \overline{\lim_{t\to 0^+}} \|u(\cdot,t)-u_0\|_{L^2([0,\ell])} \leq \sqrt{2\ell\varepsilon} \quad \forall \varepsilon>0$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0^+} \|u(\cdot,t)-u_0\|_{L^2([0,\ell])} = 0$$

Si $u_0 \in L^2([0,\ell]) \Rightarrow u(x,0) = u_0(x)$ en el sentido de L^2

Supongamos ahora que $u_0 \in AC[0,\ell]$ con $u_0' \in L^2([0,\ell])$ y $u_0(0) = u_0(\ell)$

Entonces

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \qquad \text{en el sentido } L^2$$

$$u_0'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{n\pi}{\ell} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|\frac{1}{n}$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2}$$

$$< \infty$$

Como $\left|a_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}t} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right| \leq a \quad \forall t \geq 0$ y $x \in [0, l]$

Se tiene que $u \in C([0,l] \times [0,\infty))$ y que $u(x,0) = u_0(x)$ x el criterio de Weierstrass.

Ecuación de Laplace y Poisson

Sea $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ una función
$z = x + iy$
analítica en el plano complejo entonces

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ -u_y = v_x \end{cases}$$ [Condición de Cauchy-Riemann]

$$\Rightarrow \begin{matrix} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ v_{xx} + v_{yy} = 0 \end{matrix} \Longrightarrow \left| \begin{matrix} \Delta u = 0 \\ \Delta v = 0 \end{matrix} \right.$$

Ecuación de Laplace

$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable

$$\Delta u(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)$$

Cuando $\Delta u = 0$ en todo punto decimos que u es armónica

---

Volvamos a la ecuación del calor

$$u_t - \Delta u = 0$$

Si buscamos las soluciones estacionarias, es decir $u_t = 0$, resulta que tales soluciones verifican

$$\Delta u = 0$$

Si busco una solución estacionaria p/ la ecuación

$$u_t - \Delta u = f(x)$$

tengo que resolver

$$-\Delta u = f(x)$$

Ecuación de Poisson

Ecuaciones de Laplace y Poisson

Funciones armónicas

Definición.

Una función $u \in C^2(\Omega)$ que cumple

$$\Delta u = 0 \text{ en } \Omega$$

se denomina armónica.

Ecuación de Poisson - Unicidad.

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega$$

$$u = g \quad \text{en } \partial\Omega \qquad \text{Dirichlet}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu} = h \quad \text{en } \partial\Omega \qquad \text{Neumann}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu} - a\,u = h \quad \text{en } \partial\Omega \qquad (a > 0)$$

Robin

$$\begin{cases} u = g & \text{en } \Gamma_0 \\ -\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = h & \text{en } \Gamma_1 \end{cases}$$

$\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega$

$\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$

Mixtas

Supongamos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con $\partial\Omega$ regular. Entonces el problema

$$(1) \quad -\Delta u = f$$

Dominio = abierto y conexo

con condición de frontera Dirichlet o Robin o mixtas, tiene a lo sumo una solución

¿Porqué? Supongamos que tenemos dos soluciones $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$ del problema (1) con la misma condición de frontera (Dirichlet o Robin o mixtas)

Entonces $\omega = u - v$ resuelve

$$-\Delta \omega = 0$$

con condiciones de Dirichlet o Robin o Mixtas homogéneas

$$0 = \int_\Omega -\Delta\omega \cdot \omega \, dx = \int_\Omega |\nabla \omega|^2 dx - \int \omega \frac{\partial \omega}{\partial \nu} ds$$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Omega} |\nabla \omega|^2 dx = \int_{\partial\Omega} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \nu} ds$$

Si estoy con condicion de Dirichlet o mixtas homogeneas

$$\int_\Omega |\nabla w|^2 dx = 0 \Rightarrow \nabla w = 0 \text{ en } \Omega$$

$\Rightarrow w$ es cte en Ω

$\Rightarrow w = 0$ por la condicion de frontera

si estoy con condición de Robin

$$\int_\Omega |\nabla w|^2 dx = \int_{\partial\Omega} w \frac{\partial w}{\partial \nu} dS = -a \int_{\partial\Omega} w^2 dS \leq 0$$

$\Rightarrow \int_\Omega |\nabla \omega|^2 dx \leq 0 \Rightarrow |\nabla \omega| = 0$ en Ω

$\Rightarrow \omega$ es cte en Ω

y por la condición de Robin

$u = 0$ en Ω

¿Qué pasa si tenemos condición de Neumann?

No tenemos unicidad, pero las soluciones difieren en una constante

Sea $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ y $\Delta u = 0$

Si $v(x) = u(x-y) \Rightarrow \Delta v = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^N$

Invariante por traslaciones

Sea $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $M^t M = Id$ $\omega(x) = u(Mx)$

$D^2\omega(x) = M^t D^2 u(Mx) M$ Invariante por rotaciones

$\Delta \omega(x) = tr(D^2\omega(x)) = tr(M^t D^2 u(Mx) M)$

$= tr(M^t M D^2 u(x)) = tr(D^2 u(x)) = \Delta u$

$= 0$

Una cantidad invariante por rotaciones es el radio $r = |x|$

Busquemos funciones armónicas radialmente simétricas

$$u(x) = u(r) \qquad r = |x|$$

$$u_{x_i} = u_r(r) \frac{x_i}{|x|}$$

$$u_{x_i x_i} = u_{rr}(r) \frac{x_i^2}{|x|^2} + u_r(r) \frac{1}{|x|} - u_r(r) \frac{x_i^2}{|x|^3}$$

$$\Delta u = \sum u_{x_i x_i} = u_{rr} \frac{\sum x_i^2}{|x|^2} + u_r \left(\frac{N}{r} - \frac{\sum x_i^2}{|x|^3} \right)$$

$$= u_{rr} + \left(\frac{N-1}{r} \right) u_r$$

$$0 = \Delta u = u_{rr} + \frac{N-1}{r} u_r \qquad N \geq 2$$

$$N = 2 \longrightarrow 0 = u_{rr} + \frac{u_r}{r}$$

$$\frac{u_{rr}}{u_r} = \frac{-1}{r} \longrightarrow \log u_r = -\log r + C$$

$$\longrightarrow u_r = \frac{c}{r}$$

$\Rightarrow \quad u(r) = C_1 \log r + C_2$

Tomo $C_2 = 0$ y $C_1 = -\frac{1}{2\pi}$

$$\phi(|x|) = -\frac{1}{2\pi} \log|x| \to \Delta \phi(x) = -\delta_0(x)$$

Funcion de Dirac en 0

Si $N \geq 2$

$$\frac{u_{rr}}{u_r} = -\frac{N-1}{r} \to \log u_r = -(N-1)\log r + C$$

$$\to u_r = \frac{C}{r^{N-1}}$$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{c_1}{r^{N-2}} + c_2$$

Tomo $c_2 = 0$ $\quad c_1 = \dfrac{-1}{N(N-2)\alpha(N)}$

↳ la medida de la bola unitaria

$$\phi(x) = -\frac{1}{N(N-2)\alpha(N)|x|^{N-2}} \rightarrow \Delta\phi(x) = -\delta_0(x)$$

obs $|D\phi(x)| \leq \dfrac{C}{|x|^{N-1}}$ y $|D^2\phi(x)| \leq \dfrac{C}{|x|^N}$ $\quad x \neq 0$

$-\Delta u = f$ e $\mathbb{R}^N$

Idea

$u = \phi * f$

$-\Delta u = -\Delta \phi * f = \int -\Delta \phi (x-y) f(y) dy$

$= \int \delta_0 (x-y) f(y) dy$

$= f(x)$

Ecuaciones de Laplace y Poisson

Solución fundamental de la ecuacion de Laplace

Definición

La función $\Phi \colon \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & \text{si } N = 2, \\ \frac{1}{N(N-2)\alpha(N)} \frac{1}{|x|^{N-2}} & \text{si } N > 2. \end{cases}$$

se denomina la solución fundamental de la ecuación de Laplace.

$\alpha(N)$ denota el volumen de la bola unitaria de $\mathbb{R}^N$.

Ecuaciones de Laplace y Poisson

Solución fundamental de la ecuacion de Laplace

Teorema.

Sea $f \in C_c^2(\mathbb{R}^N)$ y definimos $u \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, como

$$u(x) := \Phi \star f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(x-y) f(y) dy.$$

Entonces $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ y resuelve

$$-\Delta u = f \text{ en } \mathbb{R}^N.$$

D/ Tenemos

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x-y) f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(y) f(x-y)\, dy$$

$$\frac{u(x+he_i) - u(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(y) \frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h}\, dy$$

$$f \in C_c^2(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h} \rightrightarrows f_{x_i}(x-y)$$

en $\mathbb{R}^N$

$$\Rightarrow u_{x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(y) f_{x_i}(x-y)\,dy \qquad i=1,\dots,N$$

Tarea $$u_{x_i x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(y) f_{x_i x_j}(x-y)\,dy \qquad \begin{matrix} i=1\dots N \\ j=1\dots N \end{matrix}$$

$$u \in C^2(\mathbb{R})$$

El problema que tenemos es que ϕ explota en 0. Vamos a tener que tener un poco de cuidado con el 0. Sea $\varepsilon > 0$

$$\Delta u = \underbrace{\int_{B_\varepsilon(0)} \phi(y)\, \Delta_x f(x-y)\, dy}_{I_\varepsilon} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(0)} \phi(y)\, \Delta_x f(x-y)\, dy}_{J_\varepsilon}$$

$$|I_\varepsilon| \leq C \, \|D^2 f\|_{C^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{B(0,\varepsilon)} |\phi(y)|\, dy$$

Si $N=2$

$$C_N \int_{B(0,\varepsilon)} |\log(y)|\, dy \leq C_N \int_0^\varepsilon r |\log(r)|\, dr \leq C \varepsilon^2 |\log \varepsilon|$$

Si $N>2$

$$C_N \int_{B_\varepsilon(0)} \frac{dy}{|y|^{N-2}} = C_N \int_0^\varepsilon \frac{r^{N-1}}{r^{N-2}}\, dr = C_N\, \varepsilon^2$$

$$\therefore\ |I_\varepsilon| \leq C \begin{cases} \varepsilon^2 \log|\varepsilon| & \text{si } N=2 \\ \varepsilon^2 & \text{si } N>2 \end{cases}$$

Veamos que pasa con J_ε

$$J_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(0)} \phi(y)\, \Delta_y f(x-y)\, dy = -\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(0)} \nabla \phi(y) \cdot \nabla_y f(x-y)\, dy$$

$\to$ Cambio y por x

$$+\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \phi(y)\, \underline{\partial f}(x-y)\, dS(y) = K_\varepsilon + L_\varepsilon$$
$$\partial\nu$$

$\partial\nu \rightarrow$ Normal interior

De manera similar a la cota de I_ε, tenemos que

$$|L_\varepsilon| \leq \|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\phi(y)|\, dy$$

$$\leq C \begin{cases} \varepsilon \log|\varepsilon| & \text{si } N=2 \\ \varepsilon & \text{si } N>2 \end{cases}$$

Veamos que pasa con K_ε

$$K_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(0)} \Delta \phi(y) f(x-y)\, dy - \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(y) f(x-y)\, dS(y)$$

$\Delta \phi = 0$ en $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$

$$= - \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(y) f(x-y)\, dS(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu}(y) = \nabla \phi \cdot \nu = -\frac{1}{N\alpha(N)} \frac{y}{|y|^N} \cdot \frac{-y}{|y|} = \frac{1}{N\alpha(N)} \frac{1}{|y|^{N-1}}$$

$$= \frac{1}{N\alpha(N)} \frac{1}{\varepsilon^{N-1}}$$

$$\Rightarrow N_\varepsilon = \frac{-1}{N\alpha(N)\varepsilon^{N-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} f(x-y)\, dS(y)$$

$$= -\fint_{\partial B_\varepsilon(x)} f(y)\, dS(y) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} -f(x)$$

Pasando al limite en todos lados tenemos que $\quad -\Delta u(x) = f(x)$

¿Son todas las soluciones?

Importante

$$-\Delta \phi = \delta_0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N$$

en el sentido de resultado anterior