Ecuaciones de Laplace y Poisson

Propiedad del valor medio

Teorema (Propiedad del valor medio).

Si $u \in C^2(\Omega)$ es armónica entonces

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u dS = \fint_{B(x,r)} u dy.$$

para cada bola $B(x,r) \subset \Omega$.

$B_r(x)$

D/

$$\phi(r) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\,dS(y) = \fint_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\,dS(z)$$

$$\phi'(r) = \fint_{\partial B(0,1)} \nabla u(x+rz)\, z \, dS(z)$$

$$= \fint_{\partial B(x,r)} \nabla u(y)\, \frac{y-x}{r}\, dS(y)$$

→ Normal exterior

Teor de la divergencia

$$= \frac{1}{N\alpha(N) r^{N-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u \, dy = 0$$

$$\Rightarrow \phi(r) = cte$$

$$\phi(r) = \lim_{t\to 0} \phi(t) = \lim_{t\to 0} \fint_{\partial B(0,t)} u\, ds = u(x) \checkmark$$

$$\int_{B(x,r)} u\, dy = \int_0^r \int_{\partial B(x,t)} u\, dS\, dt = u(x) \int_0^r N\alpha(N) t^{N-1} dt$$

$$= \alpha(N) r^N u(x) \blacksquare$$

Ecuaciones de Laplace y Poisson

Solución fundamental de la ecuacion de Laplace

Teorema (Propiedad reversa del valor medio).

Si $u \in C^2(\Omega)$ tal que para toda bola $B(x,r) \subset \Omega$ se cumple que

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u dy$$

entonces u es armonica.

D/ Queremos ver que $\Delta u = 0$ en Ω. Supongamos que no, entonces existe $x \in \Omega$ tq $\Delta u(x) \neq 0$

Supongamos que $\Delta u(x) > 0$, como $u \in C^2$ existe $r > 0$ tq $\Delta u(y) > 0$ en $B(x,r) \subseteq \Omega$

Sea

$$\phi(t) = \fint_{\partial B(x,t)} u(s)\, dS(y) = u(x, \qquad 0 < t \leq r$$

$$\Rightarrow 0 = \phi'(t) = \frac{t}{N} \fint_{B(x,t)} \Delta u(y)\, dy > 0 \quad \text{Abs}$$

En realidad se puede probar que si $u \in C(\Omega)$ y satisface la propiedad del valor medio entonces $u \in C^\infty(\Omega)$ y es armonica en Ω. Proximamente

Ecuaciones de Laplace y Poisson

Principio fuerte del máximo

Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^{n}$.

Teorema (Principio fuerte del máximo).

Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ armónica en Ω. Entonces

$$\max\{u(x) : x \in \overline{\Omega}\} = \max\{u(x) : x \in \partial\Omega\}.$$

entonces u es armonica. Además si Ω es conexp y existe un punto $x_0 \in \Omega$ tal que

$$u(x_0) = \max\{u(x) : x \in \overline{\Omega}\}$$

entonce u es constante en Ω.

D/ Supongamos que existe $x_0 \in \Omega$ tq

$$u(x_0) = \max_{\Omega} u = M$$

Sea $0 < r < dist(x, \partial\Omega)$

$$M = u(x_0) = \fint_{B(x_0,r)} u\,dy \le M$$

$\Rightarrow u = M$ en $B(x_0, r)$

$\therefore \{x \in \Omega : u(x) = M\}$ es cerrado y abierto relativo a Ω

$\Rightarrow \quad \Omega = \{ x : h(x) > M \} \Rightarrow$ ii ✓

$\Downarrow$

i $\Rightarrow$

Observar que vale lo mismo con el mínimo

Ecuaciones de Laplace y Poisson

Unicidad

Ω dominio acotado

Teorema.

Sean $g \in C(\partial\Omega)$ y $f \in C(\Omega)$. Entonces existe a lo sumo una solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = g & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

D/ Supongo que u y v son dos soluciones del problema, entonces $w = u - v$ resuelve

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{en } \Omega \\ w = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Por el principio de máximo tenemos que $w \equiv 0$ o $w < 0$ en Ω.
De manera analoga tenemos que $-w \equiv 0$ o $-w < 0$ en Ω. Por lo tanto, $w \equiv 0$ en Ω ∎

En realidad tenemos algo más

Sea Ω un dominio acotado,

$g_1, g_2 \in C(\partial\Omega)$, $f \in C(\Omega)$ y

$u_1, u_2 \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ tales que

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = -\Delta u_2 = f & \text{en } \Omega \\ u_1 = g_1 & \text{en } \partial\Omega \\ u_2 = g_2 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Continuidad con respecto al dato de borde

$$\Rightarrow \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|g_1 - g_2\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$$

* Si $g_1 \geq g_2$ en $\partial\Omega$ entonces $u_1 \geq u_2$ en Ω

Pero si además $g_1 \neq g_2$ se tiene que

$u_1 > u_2$ en Ω

Comparación

Ecuaciones de Laplace y Poisson

Estimaciones

$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n \quad |\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n$

Teorema.

Sea u una función armónica en Ω. Entonces

"$u \in C^k$"

$$|D^\beta u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{N+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$

para cada bola $B(x_0, r) \subset \Omega$ y cada multiíndice de orden $|\beta| = k$, donde

$$C_0 = \frac{1}{\alpha(N)}, \quad \text{y} \quad C_k = \frac{(2^{N+1}Nk)^k}{\alpha(N)} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$D^\beta u = \frac{\partial^{|\beta|} u}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_n}}$$

D/ Es por inducción en k

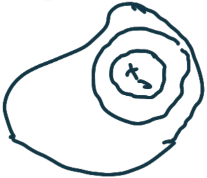
$$k=0 \longrightarrow u(x_0) = \fint_{B(x_0,r)} u\,dy \leq \frac{1}{\alpha(N)\, r^n} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$

PVM

$k=1$

$$|u_{x_i}(x_0)| = \left| \fint_{B(x_0,r/2)} u_{x_i}\,dx \right| = \left| \frac{2^N}{\alpha(N)\, r^N} \int_{\partial B(x_0,r/2)} u\,\nu_i\,dS \right|$$

$$\leq \frac{2N}{r} \|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0,r/2))}$$



Si $x \in \partial B(x_0, r/2) \Rightarrow B(x, r/2) \subseteq B(x_0, r) \subset U$

$$\Rightarrow \quad |u(x)| \leq \frac{1}{\alpha(N)} \left(\frac{2}{r}\right)^N \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$

$$\Rightarrow \quad |u_{x_i}(x_0)| \leq \frac{2^{N+1} N}{\alpha(N)\, r^N} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$

$$\Rightarrow \quad |D^\beta u(x_0)| \leq \underbrace{\frac{2^{N+1} N}{\alpha(N)\, r^N}}_{= C_1} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$

Tomo $k > 1$ y lo supongo cierto p/ $k-1$

$B(x_0, r) \subset U$

$\beta \in \mathbb{N}_0^n \quad |\beta| = k$

$D^\beta u = (D^{\tilde{\beta}} u)_{x_i}$ con $i \in \{1, \dots, N\}$

$\tilde{\beta} \in \mathbb{N}_0^n \quad |\tilde{\beta}| = k-1$ Entonces

$$|D^\beta u(x_0)| \leq \frac{Nk}{r} \| D^{\tilde{\beta}} u \|_{L^\infty(\partial B(x_0, r/k))}$$

Como antes

Si $x \in \partial B(x_0, r/k) \Rightarrow B\left(x, \frac{k-1}{k} r\right) \subseteq B(x_0, r) \subset U$

Usando que vale la desigualdad p/ $k-1$ tenemos que

$$|D^\beta u(x)| \leq \frac{\left(2^{N+1} N (k-1)\right)^{k-1}}{\alpha(N)\left(\frac{k-1}{k} r\right)^{N+k-1}} \underbrace{\|u\|_{L^1\left(B\left(x, \frac{k-1}{k} r\right)\right)}}_{\text{Lo podemos cambiar por } L^1(B(x_0, r))}$$

$$\Rightarrow |D^\alpha u(x_0)| \leq C_k \|u\|_{L^1(B(x_0, r))}$$

Ecuaciones de Laplace y Poisson

Teorema de Liouville

Teorema.

Si $u\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es armonica y acotada entonces u es constante-

D/ $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $\forall r > 0$ tenemos que

$$|Du(x_0)| \underset{\uparrow}{\leq} \frac{C_1}{r^{N+1}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \leq \frac{C_1 \alpha(N)}{r} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

Por el Teo anterior

Ecuaciones de Laplace y Poisson

Formula de Representación

Teorema (Formula de Representación).

Sea $f \in C_c^2(\mathbb{R}^N)$, $\boxed{N \geq 3.}$ Si u es una solución acotada de

$$-\Delta u = f \text{ en } \mathbb{R}^N$$

entonces existe una constante C tal que

Sol Fundamental

$$u(x) = \Phi * f(x) + C \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Es un corolario de lo anterior

D/ $\phi(|x|) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0$ P/ $N \geq 3$

$\Rightarrow$ $\tilde{u} := \phi * f$ es una solución acotada de

$$-\Delta u = f \text{ en } \mathbb{R}^N$$

Si v es otra solución acotada entonces $\tilde{u} - v$ es una solución acotada de

$$-\Delta u = 0 \text{ en } \mathbb{R}^N$$

por el teor de Liouville $\tilde{u} - v = C$ $\blacksquare$

Ecuaciones de Laplace y Poisson

Desigualdad de Harnack

Teorema.

Para cada abierto y conexo $A \subset\subset \Omega$ existe $C > 0$, que depende solo de V, tal que

$$\sup\{u(x) : x \in A\} \leq C \inf\{u(x) : x \in A\}$$

para toda u función nonegativa y armónica en Ω.

En particular $\frac{1}{C} u(y) \leq u(x) \leq C\, u(y) \quad \forall x, y \in A$

D/ Sea $r = \frac{1}{4}\operatorname{dist}(A, \partial\Omega)$

Tomemos $x, y \in A$ tq $|x-y| < r$

$$u(x) = \fint_{B(x,2r)} u\,dz \geq \frac{1}{2^N} \fint_{B(y,r)} u(z)\,dz = \frac{1}{2^N} u(y)$$

$\Rightarrow 2^N u(y) \geq u(x) \geq \frac{1}{2^N} u(y)$ $\forall x, y \in A$ con $|x-y| < r$

Como A es conexo y $\bar{A}$ es compacto existen $B_1 \dots B_n$ bolas de radio r tq $\bar{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i$

y $B_i \cap B_{i-1} \neq \emptyset$ $\forall i = 2, \dots, n$

$$\Rightarrow \quad u(x) \geq \frac{1}{2^n N} u(y) \quad \forall x, y \in A \quad \blacksquare$$

Identidades de Green

Sean Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera de clase C^1 y $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Entonces

$$\int_\Omega v \Delta u \, dx = -\int_\Omega \nabla v \nabla u \, dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} \, ds$$

$$\int_{\partial\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds$$

Las hipotesis sobre u, v se pueden relajar por ejemplo se puede pedir que $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$

tales que Δu y Δv sean acotados en Ω

Observar que si u es armonica en Ω entonces

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}\, dS = 0 \quad y \quad \int_{\Omega} |Du|^2 dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \eta}\, ds$$

Supongamos que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^N,\ N \geq 3)$

Tomemos $x \in \Omega$ y $r > 0$ tq $B(x,r) \subset \Omega$ y

$$v(y) = \phi(y-x) = +\frac{1}{N(N-2)\alpha(N)}\,\frac{1}{|y-x|^{N-2}}$$

→ la solución fundamental

Por la 2da identidad de green

$$\int_{\Omega\setminus B(x,r)} (v\Delta u - u\underbrace{\Delta v}_{=0})\,dy = \int_{\partial(\Omega\setminus B(x,r))} \left(v\cdot\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dS$$

Entonces

$$\int_{\Omega \setminus B(x,r)} v \Delta u \, dy = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS(y)$$

$$- \int_{\partial B(x,r)} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS y$$

$$\int_{\partial B(x,r)} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, dS(y) = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS(y)$$

$$+ \int_{\Omega \setminus B(x,r)} v \Delta u \, dy + \int_{\partial B_r(x,r)} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS$$

$$\int_{\partial B(x,r)} u \frac{\partial v}{\partial n} \, dy = \int_{\partial B(x,r)} u \, \nabla v \cdot \frac{y-x}{|y-x|} \, dS(y)$$

$$\nabla v(y) = \frac{-1}{N \alpha(N)} \frac{1}{|y-x|^{N-1}} \frac{y-x}{|y-x|}$$

$$\Rightarrow \int_{\partial B(x,r)} u \frac{\partial v}{\partial n} \, dy = \frac{-1}{N \alpha(N) \, r^{N-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) \, dS(y) \xrightarrow[r \to 0]{} -u(x)$$

Tiree $\displaystyle\int_{\Omega \setminus B(x,r)} v\,\Delta u\,dy \xrightarrow[r\to 0]{} \int_{\Omega} v\,\Delta u\,dy$

$$\int_{\partial B(x,r)} v\,\frac{\partial u}{\partial \eta}\,ds \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

Por lo tanto

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \eta} - v\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) dS(y) + \int v\,(-\Delta u)\,dy$$

Ahora si u es solucion de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{e } \partial\Omega \end{cases}$$

→ Molesta

tenemos que

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega}\left(g(y)\frac{\partial \upsilon}{\partial n}(y) - \upsilon(y)\frac{\partial u(y)}{\partial n}\right) dS(y)$$
$$+ \int_{\Omega} \upsilon(y) f(y)\, dy$$

Sea φ tal $\Delta\varphi = 0$ en Ω Entonces

x la segunda identidad de green

$$\int_{\Omega} \varphi \Delta u \, dy = \int_{\partial\Omega} \left(\varphi \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) ds$$

$$-\int_{\Omega} \varphi f \, dy = \int_{\partial\Omega} \left(\varphi \frac{\partial u}{\partial n} - g \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) ds$$

si le pido $\varphi = v$ en $\partial\Omega$

Tenemos que

$$\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} \, dS = \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \, dS - \int_{y} \varphi f \, dy$$

$$\Rightarrow u(x) = -\int_{\partial\Omega} g \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) dS + \int_{\Omega} (v - \varphi) f \, dy$$

Este lado no depende de u

Ecuaciones de Laplace y Poisson

Función de Green

Definición.

La función de Green en U se define

$$G(x,y) := \Phi(x-y) - \varphi_x(y) \quad \forall x, y \in \Omega,\ x \neq y$$

donde φ_x es la solución de

$$\begin{cases} \Delta \varphi_x = 0 & \text{en } \Omega \\ \varphi_x = \Phi(y-x) & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

El problema ahora es encontrar φ_x

Obs $G = 0$ en ∂U

Ecuaciones de Laplace y Poisson

Función de Green

Teorema (Formula de representación usando la función de Green).

Sean $f \in C(\Omega)$ y $g \in C(\partial\Omega)$. Si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ es una solución de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = g & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

entonce

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} g(y)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)dS(y) + \int_{\partial\Omega} f(y)G(x,y)dy.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\Delta G = \delta_x & \text{en } \Omega \\ G = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Ecuaciones de Laplace y Poisson

Función de Green

Teorema (Simetria).

Para todo $x, y \in \Omega$ $x \neq y$ se tiene que $G(x, y) = G(y, x)$.

D/ Sean $x, y \in \Omega$ y $r>0$ tq

$$B(x,r) \subset \Omega \quad B(y,r) \subset \Omega \quad y$$

$$B(x,r) \cap B(y,r) = \emptyset$$

$v(z) = G(x, z)$ $\Rightarrow$ $\Delta v_1 = 0$ en $\Omega \setminus (B(x,r) \cup B(y,r))$

$w(z) = G(y, z)$ $\quad \Delta v_2 = 0$

$(G = 0$ en $\partial\Omega)$

Por la 2^{da} Identidad de Green

$$\int_{\partial B(x,r)} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} w - \frac{\partial w}{\partial \nu} v \right) dS(z) = \int_{\partial B(y,r)} \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} v - \frac{\partial v}{\partial \nu} w \right) dS(z)$$

$$\left|\int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial w}{\partial \nu}\cdot v\, dS\right| \leq C\, \varepsilon^{n-1} \sup_{\partial B(x,r)} |v| \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

(Tarea)

W es suave en x

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial v}{\partial \nu}\, w\, dS = \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial \phi(x-z)}{\partial \nu}\, w(z)\, dS \xrightarrow[r\to 0]{} w(z)$$

ya lo vimos

$$- \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial \varphi_x(x-z)}{\partial \nu}\, w(z)\, dS \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

$$\int_{\partial B(x,r)} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} w - \frac{\partial w}{\partial \nu} v\right) dS(z) = \int_{\partial B(y,r)} \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} v - \frac{\partial v}{\partial \nu} w\right) dS(z)$$

$$r \longrightarrow 0$$

$$w(x) \qquad\qquad v(y)$$

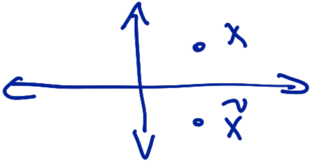
Ecuaciones de Laplace y Poisson

Función de Green para un semi-espacio

Definición.

Si $x = (x_1, \dots, x_{N-1}, x_N) \in \mathbb{R}^N_+$, su reflexión en el plano $\partial\mathbb{R}^N_+$ es el punto

$$\tilde{x} := (x_1, \dots, x_{N-1}, -x_N).$$



$$v(y) = \Phi(y - \tilde{x})$$

$$\Delta v = 0 \text{ on } \mathbb{R}^n_+ \text{ xq } \tilde{x} \in \mathbb{R}^n_+$$

Si $y \in \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow v(y) = \Phi(y_1 - x_1, \dots, y_{n-1} - x_{n-1}, x_n)$

$$= \Phi(y - x) \checkmark$$

Ecuaciones de Laplace y Poisson

Función de Green para un semi-espacio

Definición.

La función de Green en el semi-espacio $\mathbb{R}^N_+$ es

$$G(x,y) := \Phi(y-x) - \Phi(y-\tilde{x}).$$

$$\frac{\partial G}{\partial y_N}(x,y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y_N}(y-x) - \frac{\partial \Phi}{\partial y_N}(y-\tilde{x}) = \frac{-1}{N\alpha(N)}\left[\frac{y_N - x_N}{|y-x|^N} - \frac{y_N + x_N}{|y-\tilde{x}|^N}\right]$$

$$\frac{\partial G}{\partial \nu} = \nabla G \cdot (0, \dots, 0, -1) = -\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{-2x_N}{N\alpha(N)\,|x-y|^N}$$

Si u es una solución de

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{e } \mathbb{R}^N_p \\ u = g & \text{e } \partial\mathbb{R}^N_+ \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{2x_N}{N\alpha(N)} \int_{\partial\mathbb{R}^N_+} \frac{g(y)}{|x-y|^N}\,dy$$

¿Si pasa esto último tenemos una sol. de ?

Tomemos $K(x,y) = \dfrac{2\, x_N}{N\,\alpha(N)} \dfrac{1}{|x-y|^N}$

$x \in \mathbb{R}^N_+ \quad y \in \partial \mathbb{R}^N_+$

- K es suave $\forall\, x \neq y$
- $\displaystyle\int_{\partial \mathbb{R}^N_+} K(x,y)\, dy = 1$
- $\Delta_x K(x,y) = 0$

- $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N_+)$

- $\Delta u = \int_{\partial \mathbb{R}^N_+} \Delta_x K(x,y)\, g(y)\, dy = 0$

¿ $u(x) = g(x)$ en $\partial \mathbb{R}^N_+$?

Ecuaciones de Laplace y Poisson

Función de Green para un semi-espacio

Teorema (Formula de Poisson para el semi-espacio).

Sean $g \in C(\mathbb{R}^{N-1}) \cap L^\infty(\mathbf{R}^{N-1})$ y $u\colon \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}$

$$u(x) = \frac{2x_N}{N\alpha(N)} \int_{\partial\mathbb{R}^N_+} \frac{g(y)}{|x-y|^N} dy$$

Entonces $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N_+)$,

$$\Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N_+ \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathbb{R}^N_+}} u(x) = g(x_0)$$

para todo punto $x_0 \in \partial\mathbb{R}^N_+$.