Ecuaciones de Laplace y Poisson

Función de Green para un semi-espacio

Teorema (Formula de Poisson para el semi-espacio).

Sean $g \in C(\mathbb{R}^{N-1}) \cap L^\infty(\mathbf{R}^{N-1})$ y $u \colon \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}$

$$u(x) = \frac{2x_N}{N\alpha(N)} \int_{\partial\mathbb{R}^N_+} \frac{g(y)}{|x-y|^N} dy$$

Entonces $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N_+)$,

$$\Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N_+ \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathbb{R}^N_+}} u(x) = g(x_0)$$

para todo punto $x_0 \in \partial\mathbb{R}^N_+$.

Fijemos $x_0 \in \partial \mathbb{R}^N_+$

Dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ tq $|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon$

si $y \in \partial \mathbb{R}^N_+ \cap B(x_0, \delta)$

Sea $x \in B(x_0, \delta) \cap \mathbb{R}^N_+$. Entonces

$$|u(x) - u(x_0)| \leq \int_{\partial \mathbb{R}^N_+} K(x,y)\, |g(y) - g(x_0)|\, dy$$

$$= \underbrace{\int_{\partial \mathbb{R}^N_+ \cap B(x_0,\delta)} K(x,y)\, |g(y) - g(y_0)|\, dy}_{I} + \underbrace{\int_{\partial \mathbb{R}^N_+ \setminus B(x_0,\delta)} K(x,y)\, |g(y) - g(x_0)|\, dy}_{J}$$

$$I \leq \varepsilon \int_{\partial \mathbb{R}^N_+} K(x,y)\,dy = \varepsilon$$

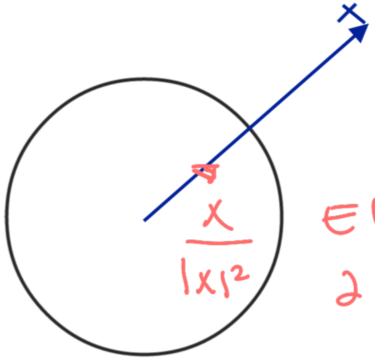
Si $|x-x_0| \leq \delta/2$ y $|y-x_0| \geq \delta \Rightarrow$

$$|y-x_0| \leq |y-x| + \delta/2 \leq |y-x| + \tfrac{1}{2}|y-x_0|$$

$$\Rightarrow |y-x| \geq \tfrac{1}{2}|y-x_0| \Rightarrow$$

$$J \leq 2\|g\|_\infty \int_{\partial \mathbb{R}^N_+ - B(x_0,\delta)} K(x,y)\,dy \leq C\|g\|_\infty x_N \int_{\partial \mathbb{R}^N_+ - B(x_0,\delta)} \frac{dy}{|x-y|^N}$$

$$\leq C_N \|g\|_\infty x_N \int_{\partial \mathbb{R}^N_+ \setminus B(x_0,\delta)} \frac{dy}{|x_0-y|^N} \xrightarrow[x_N \to 0^+]{} 0 \qquad \blacksquare$$



El dual con respecto a $\partial B(0,1)$

Ecuaciones de Laplace y Poisson

Función de Green para una bola

Definición.

Si $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, el punto

$$\tilde{x} := \frac{x}{|x|^2}$$

se denomina el punto dual a x con respect a $\partial B(0,1)$.

Dato $x \in B(0,1)$ buscamos

$$\begin{cases} \Delta \varphi_x = 0 & \text{en } B(0,1) \\ \varphi_x = \Phi(y-x) & \text{en } \partial B(0,1) \end{cases}$$

$y \in \partial B(0,1)$

$$|y-x|^2 = |y|^2 - 2y\cdot x + |x|^2 = 1 - 2y\cdot x + |x|^2$$

$$= |x|^2 \left(\frac{1}{|x|^2} - 2y \cdot \frac{x}{|x|^2} + \underset{|y|^2}{\underset{\shortparallel}{1}} \right)$$

$$= |x|^2 \left| y - \frac{x}{|x|^2} \right|^2$$

$$\Rightarrow \Phi(|x|\,|y-\tilde{x}|) = \Phi(|y-x|) \text{ on } \partial B(0,1)$$

$$\varphi_x(y) = \Phi(|x|\,(y-\tilde{x}|)$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log|x| - \frac{1}{2\pi}\log|y-\tilde{x}| & N=2 \\ \frac{1}{N(N-2)\alpha(N)} \frac{1}{|x|^{N-2}} \frac{1}{|y-\tilde{x}|^{N-2}} & N \geq 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi_x(y) = 0 \quad \forall y \in B(0,1) \text{ Parlato}$$

Ecuaciones de Laplace y Poisson

Función de Green para una bola

Definición.

La función de Green para la bola unitaria es

$$G(x,y) := \Phi(y-x) - \Phi(|x|(y-\tilde{x})).$$

Ecuaciones de Laplace y Poisson

Función de Green para la bola

Teorema (Formula de Poisson para la bola).

Sean $g \in C(\partial B(0,r))$ y $u\colon B(0,r) \to \mathbb{R}$

$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{N\alpha(N)r} \int_{\partial B(0,r)} \frac{g(y)}{|x-y|^N} dS(y)$$

Entonces $u \in C^\infty(B(0,r))$,

$$\Delta u = 0 \text{ in } B(0,r) \text{ y } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B(0,r)}} u(x) = g(x_0)$$

para todo punto $x_0 \in \partial B(0,r)$.

$u \in C(\overline{B(0,r)})$

$$K(x,y) = \frac{r^2 - |x|^2}{N\alpha(N)\, r} \, \frac{1}{|x-y|} \qquad \begin{array}{l} x \in B(0,r) \\ y \in \partial B(0,r) \end{array}$$

es el nucleo de Poisson en $B(0,r)$

Si u es armonica en un dominio Ω y $B(x_0,r) \subset\subset \Omega$. Usando la formula de Poisson p/ la bola tenemos que

$$u(x) = \frac{r^2 - |x-x_0|^2}{N\alpha(N) r} \int_{\partial B(x_0,r)} \frac{u(y)}{|y-x|^N} dS$$

$$u_{x_j}(x) = \frac{-2(x_j - x_{0j})}{N\alpha(N) r} \int_{\partial B(x_0,r)} \frac{u(y)}{|y-x|^N} dS$$

$$- N \frac{R^2 - 2|x-x_0|^2}{N\alpha(N) R} \int_{\partial B(x_0,R)} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{N+2}} u(y)\, dy$$

$$\Rightarrow |u_{x_j}(x_0)| \leq \frac{r}{\alpha(N)} \int_{\partial B(x_0,r)} \frac{|x_{0j}-y|}{|x-y|^{N+2}} u(y)\,dy$$

$$\leq r^{-N-1}$$

$$\leq \frac{N}{R} \max_{\partial B(x_0,r)} |u|$$

Por lo tanto tenemos el siguiente resultado

Ecuaciones de Laplace y Poisson

Función de Green para la bola

Corolario.

Sean u una función armónica en un dominio Ω y $B(x_0, r) \subset\subset \Omega$. Entonces

$$|u_{x_j}(x_0)| \leq \frac{N}{r} \max\{|u(x)| : x \in \partial B(x_0, r)\},$$

y

$$|u_{x_j x_k}(x_0)| \leq \frac{c(N)}{r^2} \max\{|u(x)| : x \in \partial B(x_0, r)\},$$

Ecuaciones de Laplace y Poisson

Valor medio

Teorema.

Si $u \in C(\overline{\Omega})$, satisface la propiedad del valor medio, es dicr

$$u(x) = \int_{\partial B(x,r)} udS \quad \forall B(x,r) \subset\subset \Omega,$$

entonces $u \in C^{\infty}(\Omega)$.

D/ Sean $x_0 \in \Omega$ tq tal que $B(x_0,r) \subseteq U$

y v la solucion de

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{en } B(x_0,r) \\ v = u & \text{en } \partial B(x_0,r) \end{cases}$$

Por la formula de Poisson v existe y es C^∞

$\Rightarrow$ v cumple la propiedad de valor medio en $B(x_0,r)$

$\Rightarrow$ $u-v$ tambien la cumple $\Rightarrow$

$$\sup_{B(x_0,r)} u-v = \sup_{\partial B(x_0,r)} u-v = 0 \Rightarrow u=v \text{ en } B(x_0,r)$$

$\blacksquare$

Ecuaciones de Laplace y Poisson

Analiticidad

Teorema.

Si u es armónica en Ω entonces u es analítica en Ω.

D/ Dado un punto $x_0 \in \Omega$

Q.p.q. u puede escribirse como una serie de potencia en un entorno de x_0

Sea $r = \frac{1}{4} \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$

$$M = \frac{1}{\alpha(N) r^N} \|u\|_{L^1(B(x_0, 2r))} < \infty$$

Como $B(x, r) \subset B(x_0, 2r) \subset U \quad \forall x \in B(x_0, r)$

tenemos que

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(B(x_0, r))} \leq M \left(\frac{2^{N+1} N}{r}\right)^{|\beta|} |\beta|^{|\beta|}$$

Formula de Stirling

$$\frac{k^{k+1/2}}{k!\, e^{k}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\therefore\ |\beta|^{|\beta|} \leq C e^{|\beta|} |\beta|!$$

$$N^{k} = \sum_{|\beta|=k} \frac{|\beta|!}{\beta!} \qquad \beta! = \beta_1! \cdots \beta_n!$$

$$\Rightarrow\ |\beta|! \leq N^{|k|} \beta!$$

$$\Rightarrow\ \|D^{\beta} u\|_{L^{\infty}(B(x_0,r))} \leq C M \left(\frac{2^{N+1} N^{2} e}{r} \right)^{|\beta|} \beta!$$

La serie de Taylor de u en x_0 es

$$\sum_{\beta} \frac{D^{\beta} u(x_0)}{\beta!} (x-x_0)^{\beta}$$

Veamos que la serie converge en

$$|x-x_0| < \frac{r}{2^{N+2} N^3 C}$$

$$R_k(x) = u(x) - \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{|\beta|=k} \frac{D^{\beta} u(x_0)(x-x_0)^{\alpha}}{\alpha!}$$

$$= \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^{\alpha} u(x_0 + t(x-x_0))(x-x_0)^{\alpha}}{\alpha!}$$

$0 \le t \le 1$
Depende de x

$$|R_k(x)| \le C M \sum_{|\beta|=k} \left(\frac{2^{N+1} N^2 e}{r}\right)^k \left(\frac{r}{2^{N+2} N^3 e}\right)^k$$

$$\le C \frac{M}{(2N)^k} \underbrace{\#\{\beta : |\beta| = k\}}_{\substack{\le (k+1)^N \\ \le 2^k \\ \text{p/ } k \text{ suf. grande}}} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \qquad \blacksquare$$

Ecuaciones de Laplace y Poisson

Método de energia

Teorema (Unicidad).

Sea Ω un abierto acotado tal que $\partial\Omega$ es C^1,. Existe a lo sumo una solución $u \in C^2(\overline{\Omega})$ de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = g & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

$$I(w) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla w|^2 - wf\,dx$$

$$\frac{\partial I(w+t\varphi)}{\partial t} = \int_\Omega \nabla w\cdot\nabla\varphi - \varphi f\,dx$$

$$= \int(-\Delta w - f)\varphi\,dx$$

$$\begin{matrix} \| \\ 0 \end{matrix} \qquad w=0 \text{ e } \partial\Omega$$

$$\begin{cases} -\Delta w = f & \text{e } \Omega \\ w = g & \text{e } \partial\Omega \end{cases}$$

Ecuaciones de Laplace y Poisson

Método de energia

Teorema (Principio de Dirichlet).

Sea Ω un abierto acotado tal que $\partial\Omega$ es C^1,, $f \in C(\overline{\Omega})$ y $g \in C(\partial\Omega)$. Si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ resuelve

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = g & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

entonces

$$I(u) = \min\{I(w) : w \in C^2(\overline{\Omega}) \text{ con } w = g \text{ en } \partial\Omega\}. \tag{2}$$

Por otro lad, si $u \in \{w \in C^2(\overline{\Omega}) : w = g \text{ en } \partial\Omega\}$ resuelve (2) entonces u resuelve (1).

Es mucho, puedo poner C' ?

Transformada de Fourier

$$f : (-L, L] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{\frac{in\pi x}{L}}$$

$$\text{donde } c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(y) \, e^{-i \overset{k}{n\pi/L}\, y} \, dy$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-L}^{L} f(y) \, e^{-iky} \, dy \, e^{ikx} \underbrace{\frac{\pi}{L}}_{\Delta k}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \, e^{-iky} \, dy}_{\mathcal{F}[u](k)} \, e^{ikx} \, dk$$

Transformada de Fourier

Definición

Definición.

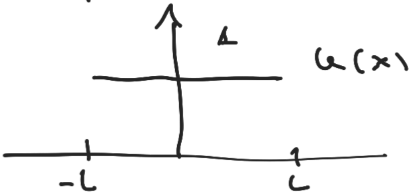
Dada $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ se define la transformada de Fourier de u como

$$\mathfrak{F}[u](y) = \hat{u}(y) := \int_{\mathbb{R}^N} u(x)e^{-2\pi i x \cdot y}\, dx.$$

Obs: $\|\hat{u}\|_\infty \leq \|u\|_1$

$\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$ es un operador lineal y continuo

Ej



Seno cardinal

$\uparrow$

$\mathrm{Senc}(2Ly)$

$$\hat{u}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-2i\pi xy} dx = \int_{-L}^{L} e^{2i\pi xy} dx$$

$$= \frac{1}{-2i\pi y} e^{-2i\pi xy}\Big|_{-L}^{L} = \frac{e^{2i\pi Ly} - e^{-2i\pi Ly}}{2i\pi y} = \frac{\mathrm{sen}(2\pi Ly)}{\pi y L} L$$

Transformada de Fourier
Convolución

Proposición.

Sean $u, v \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Entonces

$$\mathfrak{F}[u * v](y) = \mathfrak{F}[u](y)\mathfrak{F}[v](y).$$

D/ $\widehat{u * v}(y) = \int_{\mathbb{R}^N} (u*v)(x)\, e^{-2\pi i x y}\, dy$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u(t)\, v(x-z)\, dz \right) e^{-2\pi i x y}\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} u(t) \int_{\mathbb{R}^N} v(x-z)\, e^{-2\pi i x \cdot y}\, dx\, dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} u(z) \int_{\mathbb{R}^N} v(t)\, e^{-2\pi i (t+z)\cdot y}\, dt\, dz$$

$t = x - z$

$$= \hat{u}(y)\, \hat{v}(y) \quad \blacksquare$$

Transformada de Fourier
Regularidad y decaimiento

Teorema.

Sea $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $|x|^k u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ para algun $k \in \mathbb{N}$. Entonces $\hat{u} \in C^k(\mathbb{R}^N)$ y se tiene la fórmula

$$D^\alpha \hat{u}(y) = \mathfrak{F}[(-2\pi i x)^\alpha u](y)$$

para todo multiíndice $|\alpha| \leq k$.

D/ caso $k=1$

$$\hat{u}_{y_j}(y) = \frac{\partial}{\partial y_j} \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\, e^{-2\pi i x y}\, dx$$

$$= \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\, \frac{e^{-2\pi i x (y+he_j)} - e^{-2\pi i x y}}{h}\, dx$$

$$\longrightarrow -2\pi i x_j\, e^{-2\pi i x y}$$

$$\underset{TCD}{=} \int_{\mathbb{R}^N} u(x)(-2\pi i x_j)\, e^{-2\pi i x y}\, dx$$

$$:= \widehat{(-2\pi i x_j) u(x)}$$

El caso general sale por inducción $\blacksquare$

Transformada de Fourier

La transformada de las derivadas

Teorema.

Sea $u \in C^k(\mathbb{R}^N)$ tal que $D^\alpha u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ para todo multiíndice $|\alpha| \leq k$. Entonces $\hat{u} \in C^k(\mathbb{R}^N)$ y se tiene la fórmula

$$D^\alpha \hat{u}(y) = \mathfrak{F}[(-2\pi i x)^\alpha u](y)$$

para todo multiíndice $|\alpha| \leq k$.

D/ caso $k=1$

$$\widehat{u_{x_j}}(y) = \int_{\mathbb{R}^N} u_{x_j}(x)\, e^{-2\pi i x y}\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\, \underbrace{\left(e^{-2\pi i x y}\right)_{x_j}}_{-2\pi i y_j e^{-2\pi i x y}}\, dy$$

u tiene soporte compacto

$$= -2\pi i y_j\, \hat{u}(y) \quad \blacksquare$$