Transformada de Fourier

Clase de Schwartz

Definición

Se define la clase de Schwartz como

$$\mathcal{S} := \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^N) : \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1 + |x|^j) |D^\alpha u(x)| < \infty \quad \forall j \in \mathbb{N}_0, \alpha \in \mathbb{N}_0^N \right\}$$

Ej $C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

$e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

Espacio vectorial sobre los complejos

obs $S \subset C^1(\mathbb{R}^N)$

$u \in S(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \sup_{\mathbb{R}^N} (1+|x|^2)|u(x)| < C$

$$\Rightarrow |u(x)| \leq \frac{C}{1+|x|^2}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{C}{1+|x|^2}\,dx < \infty$$

En realidad $S \subseteq L^p(\mathbb{R}^N)$ $\forall\, 1 \leq p \leq \infty$

$\therefore F[u]$ esta bien definida

Observar que el resultado anterior también vale $\mathcal{P}/S(\mathbb{R}^n)$. Luego usando los dos últimos resultados se tiene que

$$\mathcal{F}: S \longrightarrow S$$

¿es continua?

Tenemos que dar una noción de convergencia en S.

Transformada de Fourier

Clase de Schwartz

Definición.

Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{S}$ y $u \in \mathcal{S}$. Decimos que u_n converge a u en $\mathcal{S}$ y notamos $u_k \xrightarrow{\mathcal{S}} u$ si

$$D^\alpha u_k \rightrightarrows D^\alpha u \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N \qquad \text{y} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^N} (1+|x|^j)|D^\alpha u_k(x)| \leq C_{j,\alpha} \quad \forall (k,j,\alpha) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0^N.$$

Transformada de Fourier

Clase de Schwartz

Teorema.

Sea $u \in \mathcal{S}$. Entonces $\hat{u} \in \mathcal{S}$. Más aún, $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ resulta continua con la noción de convergencia dada por la definición anterior.

Sea $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ y $j \in \mathbb{N}$

$$[u]_{\alpha j} = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1+|x|^j)\,|D^\alpha u(x)|$$

$$d(u,v) = \sum_{j\alpha \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{2^{\alpha+j}} \frac{[u-v]_{\alpha j}}{1+[u-v]_{\alpha j}}$$

(S,d) es un espacio metrico completo y tengo la misma noción de convergencia que antes

Idea p/ ver que es completo

$\{u_m\}$ CS de Cauchy $\Rightarrow d(f_n, f_m) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$\Rightarrow \forall \alpha, j \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ tenemos que $\{D^\alpha u_m\}$ y $\{|x|^j D^\alpha u_m\}$ son de Cauchy en $\|\cdot\|_\infty$

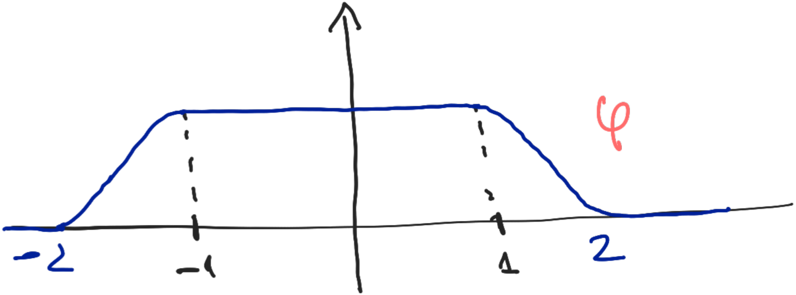
$$D^\alpha u_m \rightrightarrows u_\alpha \in C(\mathbb{R}^N)$$

$$|x|^j D^\alpha u_m \rightrightarrows u_{\alpha j} \in C_0(\mathbb{R}^N)$$

$\Rightarrow u_m \rightrightarrows u \in C^\infty$ y $|x|^j D^\alpha u_m \rightrightarrows |x|^j D^\alpha u$

Tarea $\overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^N)}^d = S(\mathbb{R}^N)$

Idea



Sea $u \in S(\mathbb{R}^N)$

$$u_n(x) = \varphi\left(\frac{x}{n}\right) u(x)$$

Mostrar que $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $d(u_n, u) \to 0$

Tarea

$$\overline{S(\mathbb{R}^N)}^{L^p} = L^p(\mathbb{R}^N)$$

para todo $1 \leq p < \infty$

En particular $\mathcal{F}$ tiene una unica extension continua a L^2

Ej $u(x) = e^{-t|x|^2} \quad t > 0$

$$\hat{u}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-t|x|^2} e^{-2\pi i y \cdot x} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{N} e^{(-t x_i - 2\pi i y_i) x_i} dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} e^{(-t x_i - 2\pi i y_i) x_i} dx_i$$

Si $\omega(x) = e^{-tx^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \quad \hat{u}(y) = \prod_{i=1}^{N} \hat{\omega}(y_i)$

$\hat{\omega} = ?$

¿Que sabemos?

$0 = \omega' + 2tx\omega$ en $\mathbb{R}$

$\Rightarrow 0 = \widehat{\omega' + 2tx\omega} = \widehat{\omega'} + \widehat{2tx\omega}$

$= 2\cancel{\pi} i y \hat{\omega}(y) + \frac{it}{\pi} \hat{\omega}'(y)$

$$\Rightarrow 0 = \hat{\omega}'(y) + \frac{2\pi^2}{\epsilon} y \,\hat{\omega}$$

$$\Rightarrow \hat{\omega}(y) = c\, e^{-\pi^2/\epsilon \; y^2}$$

$$c = \hat{\omega}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\epsilon x^2} dx = \sqrt{\pi/\epsilon} \quad \text{(Tarea)}$$

$$\Rightarrow \hat{\omega}(y) = \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}}\; e^{-\pi^2/\epsilon \; y^2}$$

$$\Rightarrow \hat{\omega}(y) = \left(\frac{\pi}{\epsilon}\right)^{N/2} \prod_{i=1}^{N} e^{-\frac{\pi^2}{\epsilon^2} y_i^2} = \left(\frac{\pi}{\epsilon}\right)^{N/2} e^{-\frac{\pi^2 \|y\|^2}{\epsilon}}$$

Observación Si $u, v \in S$

$$\int_{\mathbb{R}^N} u \hat{v}\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} u(y) \int_{\mathbb{R}^N} v(x) e^{-2\pi i x y}\, dx\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} u(y) v(x) e^{-2\pi i x y}\, dx\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} v(x) \int_{\mathbb{R}^N} u(y) e^{-2\pi i x y}\, dy\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} v(x) \hat{u}(x)\, dx$$

Entonces para todo $u \in S(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(x)\, e^{-t|x|^2}\, dx = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{N/2} \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\, e^{-\frac{\pi^2}{t^2}|x|^2}\, dx$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow t \to \infty & & \downarrow t \to \infty \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(x)\, dx & = & u(0) \end{array}$$

$\forall u \in S(\mathbb{R}^N)$

Si $u, v \in \mathcal{S} \Rightarrow \omega = u * v \in \mathcal{S}$ (Teorema)

$$\Rightarrow \omega(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\omega}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{u} \cdot \hat{v}\, dx$$

Ahora tomemos $v(x) = \overline{u(-x)}$

$$\Rightarrow \omega(0) = u * v(0) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\, v(-x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx = \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

$$\Rightarrow \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \omega(0)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}\,\hat{v}\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}|^2 dy$$

$$\hat{v}(y) = \int_{\mathbb{R}^N} \overline{u(-x)}\, e^{-2\pi i x y}\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \overline{u(x)}\, e^{2\pi i x y}\, dy$$

$$= \overline{\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\, e^{-2\pi i x y}\, dy} = \overline{\hat{u}}(y)$$

Transformada de Fourier

El Teorema de Plancherel

Teorema (Teorema de Plancherel).

Sea $u \in \mathcal{S}$. Entonces se tiene que

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

Como $\overline{S}^{L^2} = L^2$, en realidad Plancharel vale $\forall u \in L^2$, y por lo tanto $\mathcal{F} : L^2 \longrightarrow L^2$ es una isometría.

Busquemos la inversa de $\mathcal{F}$

Sea $\varepsilon > 0$ y $z \in \mathbb{R}^N$

$$V_\varepsilon(x) = e^{2\pi i x \cdot z - \varepsilon |x|^2}$$

$$\widehat{V_\varepsilon}(y) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i x z - \varepsilon |x|^2} \cdot e^{-2\pi i x y} \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i x(y-z) - \varepsilon |x|^2} \, dx$$

Miras el ejemplo

$$= \left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^{N/2} e^{-\frac{\pi^2}{\varepsilon} |y-z|^2}$$

Sea $u \in S$

$$\begin{tikzcd}
\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} u\,\hat{v}_\varepsilon\,dy \arrow[d, equal] & = \left(\dfrac{\pi}{\varepsilon}\right)^{N/2} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} u(y)\, e^{-\frac{\pi^2}{\varepsilon}|y-z|^2}\,dy \arrow[d] \\
\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}\, v_\varepsilon\,dx \arrow[r] & u(z) \\
 & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(x)\, e^{2\pi i x z}\,dx
\end{tikzcd}$$

Transformada de Fourier
Antitransformada

Teorema.

Sea $u \in \mathcal{S}$. Entonces
$$\mathcal{F}[\check{u}](y) = u(y).$$
Es decir que $\check{u} = \mathcal{F}^{-1}[u]$.

$u \in L^2$ se extiende por densidad.

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^N$$

$$4\pi^2 |y|^2 \hat{u} + \hat{u} = \hat{f}$$

$$\hat{u} = \underbrace{\frac{1}{4\pi^2 |y|^2 + 1}}_{\hat{V}(y)} \hat{f}$$

$$\Rightarrow u = f * V$$

$$V(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{1+4\pi^2|y|^2} e^{2\pi i x\cdot y} \, dy$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{1+|z|^2} e^{i x\cdot z} \, dy$$

$z = 2\pi y$

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0, +\infty) \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

$$\hat{u}(y,t) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\, e^{-2\pi i x y}\, dy$$

$$\widehat{u_t}(y,t) = \int_{\mathbb{R}^N} u_t(x,t)\, e^{-2\pi i x y}\, dy$$

$$= \hat{u}_t(y,t)$$

$$0 = \widehat{u_t - \Delta u} = \hat{u}_t + 4\pi^2 |y|^2 \hat{u}$$

$$\Rightarrow \hat{u}(y,t) = c\, e^{-4\pi^2 |y|^2 t}$$

$$c = \hat{u}(y,0) = \hat{f}(y)$$

$$\Rightarrow \hat{u}(y,t) = \hat{f}(y)\,\underbrace{e^{-4\pi^2|y|^2 t}}_{\mathcal{F}\Big(\underbrace{\frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}_{w}\Big)[y]}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = f * w(x,t)$$

$$= \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, dy$$

w es la solucion fundamental de la ec del calor