Ecuación del calor

Solución fundamental

Definición

La función

$$\Phi(x,t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{si } (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

se denomina la solución fundamental de la ecuación del calor.

Ecuación del calor

Solución fundamental

Lema.

Para cada tiempo $t > 0$ tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(x,t)dx = 1.$$

D/

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi(x,t)\,dx = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2}\,dz$$

$$z = \frac{x}{2\sqrt{t}}$$

$$= 1$$

Problema de Cauchy (homogeneo)

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = g(x) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Entonces

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x-y,t)\, g(y)\, dy$$

Obs • Dado $\delta > 0$ $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times [\delta,\infty))$ y con derivadas de todos los ordenes acotadas uniformemente acotadas por lo tanto $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times (0,+\infty))$

Tenemos que pedir q' $g \in L^\infty$

• Por otro lado

$$u_t - \Delta u = \int_{\mathbb{R}^N} \underbrace{(\phi_t - \Delta\phi)(x-y,t)}_{=0 \text{ en } \mathbb{R}^N \times (0,+\infty)} g(y)\,dy$$

x construcción

$\Rightarrow u_t - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$

• ¿$u(x,t) \longrightarrow g(x^0)$ cuando $x \longrightarrow x^0$ y $t \longrightarrow 0^+$?

Fijemos $x^0 \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$. Si asumimos que g es continua $\exists \delta > 0$ tal que

$$|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon \text{ si } |y - x_0| < \delta$$

Entonces si $|x - x_0| < \delta/2$

$$|u(x,t)-g(x_0)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x-y,t)\,|g(y)-g(x_0)|\,dy$$

Uso el lema anterior

$$\leq \underbrace{\int_{B(x_0,\delta)} \phi(x-y,t)\,dy}_{\leq 1 \text{ Uso el lema anterior}}\,\varepsilon + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_0,\delta)} \phi(x-y,t)\,|g(y)-g(x_0)|\,dy}_{I}$$

Si $\left.\begin{array}{l} |x-x_0| \leq \delta/2 \\ |y-x_0| > \delta \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} |y-x_0| \leq |y-x| + |x-x_0| \\ \leq |y-x| + \delta/2 \end{array}$

$$\Rightarrow |y-x_0| \leq |y-x| + \tfrac{1}{2}|y-x_0|$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2}|y-x_0| \leq |y-x|$$

Entonces

$$I = \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_0,\delta)} \phi(x-y,t)\,|g(y)-g(x_0)|\,dy$$

$$\leq 2\|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x-y,t)\,dy$$

$$I \leq \frac{2\|y\|_\infty}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_0,\delta)} e^{-\frac{|y-x|^2}{4t}}\, dt$$

Como $\frac{1}{2}|y-x_0| \leq |y-x|$

$$I \leq \frac{C}{t^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_0,\delta)} e^{-\frac{|y-x_0|^2}{16t}}\, dy$$

Convergencia majorada

$$z = \frac{y-x_0}{4\sqrt{t}} \Rightarrow I \leq C \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,\,\delta/4\sqrt{t})} e^{-|z|^2}\, dz \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0$$

Si $|x-x_0| < \delta/2$ y $t > 0$ es suficientemente chico

$$I < \varepsilon$$

y por lo tanto

$$|u(x,t) - g(x_0)| < 2\varepsilon$$

Demostramos el siguiente problema

Ecuación del calor

Solución fundamental

Teorema.

Sea $g \in C(\mathbb{R}^N \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(x-y,t) g(y) dy.$$

Entonces

(I) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times (0,\infty))$,

(II) $u_t - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^N \times (0,\infty)$,

(III) $u(x,t) \to g(x_0)$ cuando $(x,t) \to (x_0, 0^+)$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

ϕ resuelve este problema

$$\begin{cases} \phi_t - \Delta\phi = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0, +\infty) \\ \phi(x,0) = \delta_0 & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Problema de Cauchy no homogeneo

$$(1)\ \begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = g(x) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Como el problema es lineal, nos alcanza con encontrar la solución de

$$(2)\ \begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Porque ya se encontrar la solución del homogéneo. Entonces vamos a buscar la solución de 2.

Para esto vamos a usar el principio de Duhamel: 2 se resuelve superponiendo las soluciones del siguiente problema homogeneo

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times (s,\infty) \\ v(x,s) = f(x,s) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

donde $s > 0$. Entonces, por lo anterior,

$$v(x,t;s) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(x-y,t-s) f(y,s)\, dy$$

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t;s)\, ds$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(x-y,t-s) f(y,s)\, dy\, ds$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y,s)\,dy\,ds$$

¿Resuelve (2)?

ϕ es singular en $(0,0)$

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \phi(y,s) f(x-y, t-s)\,dy\,dt$$

Pido que $f \in C_1^2(\mathbb{R}^N \times [0,+\infty))$ y con soporte compacto

$$\Rightarrow u_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \phi(y,s) f_t(x-y, t-s)\,dy\,ds$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^N} \phi(y,t) f(x-y,0)\,dy$$

$$\Delta u = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \phi(y,s) \Delta_x f(x-y,t-s)\,dy\,ds$$

$$u_t - \Delta u = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \phi(y,s) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) f(x-y,t-s)\,dy\,ds$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^N} \phi(y,t) f(x-y,0)\,dy$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \phi(y,s) \left[-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right] f(x-y, t-s)\, dy\, ds$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^N} \phi(y,t) f(x-y, 0)\, dy$$

$$\underset{\varepsilon>0}{=} \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^N} \phi(y,s) \left[-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right] f(x-y, t-s)\, dy\, ds$$

$$+ \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} \phi(y,s) \left[-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right] f(x-y, t-s)\, dy\, ds$$

$$+\int_{\mathbb{R}^N} \phi(y,s)\, f(x-y,0)\, dy$$

$$= I_\varepsilon + J_\varepsilon + K$$

$$|J_\varepsilon| \le \left(\|f_t\|_{C^\infty} + \|D^2 f\|_{C^\infty}\right) \int_0^\varepsilon \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} \phi(y,s)\, dy}_{=1}\, ds$$

$$\le C\varepsilon$$

Por otro lado

$$I_\varepsilon = \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^N} \underbrace{\left[\left(\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y\right)\phi(y,s)\right]}_{=0} f(x-y,t-s)\,dy\,ds$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^N} \phi(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon)\,dy$$

$$- \int_{\mathbb{R}^N} \phi(y,t) f(x-y,0)\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \phi(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon)\,dy - K$$

Entonces

$$u_t - \Delta u = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(y,\varepsilon)\, f(x-y, t-\varepsilon)\, dy$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{(4\pi\varepsilon)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|y|^2}{4\varepsilon}} f(x-y, t-\varepsilon)\, dy$$

$$= f(x,t)$$

$\longrightarrow \delta_0$ En medida

Ecuación del calor
Solución fundamental

Teorema.

Sea $f \in C_1^2(\mathbb{R}^N \times [0,\infty)$ y

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(x-y, t-s) f(y,s)\,dy.$$

Entonces

(I) $u \in C_1^2(\mathbb{R}^N \times (0,\infty))$,

(II) $u_t - \Delta u = f$ en $\mathbb{R}^N \times (0,\infty)$,

(III) $u(x,t) \to 0$ cuando $(x,t) \to (x_0, 0^+)$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

$\forall t > 0, \ \|u(\cdot,t)\|_\infty \leq t\|f\|_\infty \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ ✓

La solución de 1

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^N}\phi(x-y,t)\,g(y)\,dy+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}\phi(x-y,t-s)\,f(y,s)\,dy\,ds$$

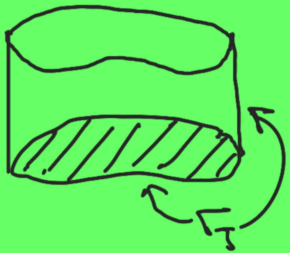
Ecuación del calor

Formula del valor medio

Definición.

Sean $T > 0$ y Ω un abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$.

1. Definimos el cilindro parabólico como
$$\Omega_T := \Omega \times (0, T].$$
2. Definimos el fontera parabólico como
$$\Gamma_T := \overline{\Omega}_T \setminus \Omega_T.$$



Ecuación del calor

Propiedad del valor medio

No

Teorema.

Sea $u \in C_1^2(\Omega_T)$ solución de

$$u_t - \Delta u = 0 \text{ en } \Omega_T.$$

Entonces

$$u(x,t) = \frac{1}{4r^N} \iint_{E(x,t;r)} u(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} dyds$$

para cada $E(x,t;r) := \left\{ (y,s) \in \mathbb{R}^{N+1} : s \leq t, \Phi(x-y,t-s) \geq \frac{1}{r}^N \right\} \subset \Omega_T.$

La bola del calor

Ecuación del calor

Principio fuerte del máximo

Teorema.

Sea $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ solución de

$$u_t - \Delta u = 0 \text{ en } \Omega_T.$$

Entonces

(I) Entonces $\max\{u(x,t) \colon (x,t) \in \overline{\Omega}_T\} = \max\{u(x,t) \colon (x,t) \in \Gamma_T\}$. Principio debil

(II) Además, si Ω es conexo y existe un punto $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ tal que

$$u(x_0, t_0) = \max\{u(x,t) \colon (x,t) \in \overline{\Omega}_T\}$$

Principio fuerte

entonces u es constante $\overline{\Omega}_T$.

D/ (i) ▶ Auxiliar: Si $u_t - \Delta u < 0$ en Ω_t

entonces $\max_{\overline{\Omega}_T} u = \max_{\Gamma_T} u$

Supongamos que no entonces existe

un $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ tq

$$u(x_0, t_0) = \max_{\overline{\Omega}_T} u$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \Delta u(x_0, t_0) \leq 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } t_0 < T \\ \geq 0 & \text{si } t_0 = T \end{cases} \end{array}$$

$\Rightarrow \quad u_t(x_0,t_0) - \Delta u(x_0,t_0) \geq 0$ Abs.

Luego $\max\limits_{\overline{\Omega_T}} u = \max\limits_{\Gamma_T} u$

- Mostremos el resultado

Dado $\varepsilon > 0$, definimos

$$w^{\varepsilon}(x,t) = u(x,t) - \varepsilon t$$

$$w^{\varepsilon}_t - \Delta w^{\varepsilon} = -\varepsilon < 0 \text{ en } \overline{\Omega_T}$$

$$\Rightarrow \quad \max_{\overline{\Omega_{T-\varepsilon}}} w^{\varepsilon} = \max_{\Gamma_{T-\varepsilon}} w^{\varepsilon}$$

Para todo $(x,t) \in \overline{\Omega_T}$

$$u(x,t) - \varepsilon T \leq \max_{\Gamma_T} u + \varepsilon T$$

$$\Big\downarrow \; \varepsilon \to 0$$

$$u(x,t) \leq \max_{\Gamma_T} u$$

(ii) Desigualdad de Harnack

Sea $u \in C^2_c(\Omega_T)$ tq $u \geq 0$ y $u_t - \Delta u = 0$ en Ω_T. Si $V \subset\subset \Omega$ y $0 < t_1 < t_2 \leq T$

entonces existe una constante C que depende solo de la distancia de entre V y $\partial\Omega$, t_1, t_2 y N tq

$$\max_{V} u(\cdot, t_1) \leq C \min_{V} u(\cdot, t_2)$$

Asumamos Harnack

Sea $M = \max_{\Lambda_T} u = u(x_0, t_0)$

$v = M - u \geq 0$ en Ω_T, $v \in C_1^2(\Omega_T)$ y

$v_t - \Delta v = 0$ en Ω_T

Por Harnack si $V \subset\subset \Omega$ tq $x_0 \in V$, $0<t<t_0$

$$\max_{\bar V} v(\cdot,t) \le C \min_{\bar V} v(\cdot,t_0) = 0$$

$\Rightarrow v = 0$ en V $\forall\, 0<t<t_0$

$\Rightarrow v \equiv 0$ en Ω.

Ω es conexo $\blacksquare$

Para terminar la demo en realidad tenemos que probar Harnack

Sin perdida de Generalidad podemos asumir que $u > 0$ en Ω_T y continua

Se $v = \log u$

$$v_t - \Delta v = \frac{u_t}{u} - \frac{\Delta u \cdot u - |\nabla u|^2}{u^2}$$

$$v_t - \Delta v = |\nabla v|^2 \text{ en } \Omega_T$$

Af Dado $V \subset\subset \Omega$ y $0 < t_1 < t_2 < T$

$\exists \gamma > 0$ (γ depende solo de V, t_1, t_2) y y $\theta \in (0,1]$ tq

$$\Delta v \geq -\theta |\nabla v|^2 - \gamma \text{ en } V \times [t_1, t_2]$$

Supongamos que vale la afirmación

Tomemos V convexo, $x_1, x_2 \in V$ y

$0 < t_1 < t_2 < T$ y escribimos

$$v(x_2, t_2) - v(x_1, t_1) =$$

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} v(s x_2 + (1-s) x_1, s t_2 + (1-s) t_1) \, ds$$

$$= \int_0^1 \nabla v \cdot (x_2 - x_1) + v_t (t_2 - t_1) \, ds =$$

$$= \int_0^1 Du \cdot (x_2 - x_1) + (\Delta u + |Du|^2)(t_2 - t_1)\, ds$$

$$\geq \int_0^1 -|Du|\,|x_2 - x_1| + ((1-\theta)|Du|^2 - \gamma)(t_2 - t_1)\, ds$$

$$\geq -\alpha$$

α depende $|x_2 - x_1|$, $|t_2 - t_1|$ y γ

$$\Rightarrow v(x_2, t_2) - v(x_1, t_1) \geq -\alpha$$

$$\log\left(\frac{u(x_2, t_2)}{u(x_1, t_1)}\right) \geq -\alpha \Rightarrow u(x_2, t_2) \geq e^{-\alpha} u(x_1, t_1)$$

Tenemos la desigualdad de Harnack para convexos. El caso general se obtiene cubriendo el dominio por bolas (Tarea).

Para terminar tenemos que probar la Af.

Tomemos $\omega = \Delta v$. Entonces

$$\omega_t = \Delta v_t = \Delta(\Delta v + |\nabla v|^2)$$
$$= \Delta \omega + \Delta |\nabla v|^2$$

$$\Delta |\nabla v|^2 = \Delta \left(\sum v_{x_i}^2 \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \left(2 v_{x_i} v_{x_i x_k} \right)_{x_k}$$

$$= \sum_{ik=1}^{N} 2 v_{x_i x_k}^2 + 2 v_{x_i} v_{x_i x_k x_k}$$

$$= 2 \sum_{ik=1}^{N} v_{x_i x_k}^2 + 2 \nabla v \cdot \nabla (\Delta v)$$

$$= 2 |\nabla^2 v|^2 + 2 \nabla v \cdot \nabla \omega$$

$$\Rightarrow \omega_t - \Delta\omega - 2\nabla v \nabla\omega = 2|\nabla^2 v|^2$$

Tomemos $\tilde{\omega} = |\nabla v|^2$

$$\tilde{\omega}_t = 2\nabla v \cdot \nabla v_t = 2\nabla v \cdot \nabla(\Delta v + |\nabla v|^2)$$

$$= 2\nabla v \cdot \nabla(\Delta v) + 2\nabla v \cdot \nabla\tilde{\omega}$$

$$= \Delta|\nabla v|^2 - 2|\nabla^2 v|^2 + 2\nabla v \nabla\tilde{\omega}$$

$$\Rightarrow \tilde{\omega}_t - \Delta\tilde{\omega} - 2\nabla v \cdot \nabla\tilde{\omega} = -2|\nabla^2 v|^2$$

Si tomo $h = \omega + \frac{1}{2}\tilde{\omega}$ y $b = -2\nabla v$

Entonces

$$h_t - \Delta h + b \cdot \nabla h = |\nabla^2 v| \geq 0$$

Sea $\zeta \in C_c^\infty(\Omega_T)$ tq

$$0 \leq \zeta \leq 1$$

$$\zeta \equiv 1 \text{ en } V \times [t_1, t_2]$$

Sea $\gamma > 0$ una constante que determinaremos luego

Afirmamos que

$$\xi^4 h + \mu t \geq 0 \text{ en } \Omega_T$$

P/un μ apropiado

Supongamos que $\xi^4 h + \mu t$ tiene un mínimo negativo en $(x_0, t_0) \in \Omega_T$.

Entonces

$$(\xi^4 h + \mu t)_t - \Delta(\xi^4 h + \mu t) \leq 0$$

en (x_0, t_0)

$$(\xi^4 h + \eta t)_t = \eta + \xi^4 h_t + 4\xi^3 \xi_t h$$

$$\Delta(\xi^4 h + \eta t) = \xi^4 \Delta h + (12|\nabla\xi|^2 + 4\xi\Delta\xi)\xi^2 h + 8\xi^4 \nabla\xi\nabla h$$

$$\Rightarrow 0 \geq \eta + \xi^4 \underbrace{(h_t - \Delta h)}_{|D^2 v| - b\cdot\nabla h} - 8\xi^4\nabla\xi\nabla h + R_1 \xi^2 h$$

donde $R_1 = 12|\nabla\xi|^2 + 4\xi\Delta\xi + 4\xi\xi_t$

Entonces

$$0 \geq \mu - \xi^4 b \cdot \nabla h + \xi^4 |D^2 v|^2 - 8\xi^3 \nabla\xi \cdot \nabla h + R_1 \xi^2 h$$

$$8\xi^3 \nabla\xi \nabla h = 8 \sum_{i=1}^{N} \xi^3 \xi_{x_i} h_{x_i} = -32 \sum_{i=1}^{N} \xi^2 \xi_{x_i}^2 h$$

$$\begin{cases} 0 = (\xi^4 h + \mu t)_{x_i} = \xi^3 (4\xi_{x_i} h + \xi h_{x_i}) \text{ a } (x_0 t_0) \\ \Rightarrow \xi h_{x_i} = -4\xi_{x_i} h \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 \geq \mu - \xi^4 b \nabla h + \xi^4 |D^2 v|^2 + (R_1 - 32 |D\xi|^2) \xi^2 h$$

$$\xi^4 h \nabla h = -2\xi^4 \nabla v \,\nabla h$$

$$= -2\xi^3 \sum_{i=1}^{w} v_{x_i}\, \xi\, h_{x_i}$$

$$\overset{=}{*}\; 8\, \xi^3 \sum_{i=1}^{N} v_{x_i}\, \xi_{x_i}\, h$$

$$= 8\, \nabla \xi\, \nabla v\, h$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \geq \eta + \xi^4 |D^2 v|^2 - R_2 \xi^2 h \quad \textcircled{0}$$

donde $R_2 = -R_1 + 32 |D\xi|^2 - 8\xi D\xi$

Observar que

$$|R_2| \leq C(1 + \xi |Dv|)$$

$$\Rightarrow \quad |R_2 \xi^2 h| \leq C(\xi^2 |h| + \xi^3 |h| |Dv|)$$

Por otro lado

$$(\xi^4 h + 1t)(x_0, t_0) < 0$$

$$\Rightarrow \quad h(x_0, t_0) < 0 \Rightarrow \Delta v(x_0, t_0) + \frac{1}{2} |Dv(x_0, t_0)|^2 < 0$$

$$\Rightarrow \quad |\nabla v|^2 \le 2|\Delta v|$$

$$\Rightarrow \quad |h| \le |\Delta v| \text{ on } (x_0, t_0)$$

$$\Rightarrow \quad |R_2 \zeta^2 h| \le C\left(\zeta^2 |\Delta v| + \zeta^3 |\Delta v|^{3/2}\right)$$

$$|\Delta v| = \sum_{i=1}^{N} |v_{x_i x_i}| \le N \left(\sum_{i=1}^{N} |v_{x_i x_i}|^2\right)^{1/2}$$

$$= N |D^2 v|$$

$$\zeta^3 |\Delta v|^{3/2} \le N^{3/2} \zeta^3 |D^2 v|^{3/2} \underset{\text{Young}}{\le} \frac{1}{2} \zeta^4 |D^2 v|^2 + C\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$C\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{4/3 - 1}{\left(\frac{4}{3}\right)^4 \left(1/2\right)^3}$$

$\Rightarrow 0 \geq \mu + 1/2\, \delta^4 |D^2 v|^2 - C \geq \mu - C > 0$ Abs

Tomo μ grande

$\therefore\; 3^4 h + \mu t > 0$ en Ω_+

$\Rightarrow\; h + \mu t > 0$ e $V \times [t_1, t_2]$

$$\Rightarrow \quad \Delta v \geq -\frac{1}{2}|\nabla v|^2 - \eta t_2 \quad \in V \times [t_1, t_2]$$

θ $\qquad\qquad\qquad$ γ