Ecuación del calor

Regularidad

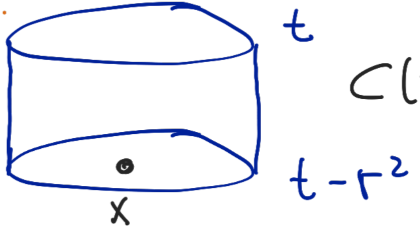
Teorema.

Sea $u \in C_1^2(\Omega_T)$ solución de

$$u_t - \Delta u = 0 \text{ en } \Omega_T.$$

Entonces $u \in C^\infty(\Omega_T)$.

D/ Introducimos notación



$$C(x,t;r) = \left\{ (y,s) : \begin{array}{l} |y-x| \le r \\ t-r^2 \le s \le t \end{array} \right\}$$

Fijemos $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ y tomamos r suficientemente chico p/que

$$C := C(x_0, t_0; r) \subseteq \Omega_T$$

Definimos

$$C' := C\left(x_0, t_0, \frac{3}{4}r\right)$$

$$C'' := C\left(x_0, t_0, \frac{1}{2}r\right)$$

observa que $C'' \subseteq C' \subseteq C$

Tomamos una función de corte ξ tal que

$$\begin{cases} 0 \leq \xi \leq 1 \\ \xi \equiv 1 \text{ en } C' \\ \xi \equiv 0 \text{ cerca la frontera parabolica de } C \end{cases}$$

Extendemos a $\xi \equiv 0$ en $(\mathbb{R}^N \times [0, t_0]) \setminus C$

Def: $v(x,t) = \xi(x,t)\, u(x,t)$ $\mathbb{R}^N \times [0, t_0]$

Asumamos que $u \in C^\infty(\Omega_T)$

observamos que

$$v_t = \xi u_t + \xi_t u$$

$$\Delta v = \xi \Delta u + 2 \nabla \xi \cdot \nabla u + u \Delta \xi$$

$$\Rightarrow v_t - \Delta v = \underbrace{\xi_t u - 2 \nabla \xi \nabla u - u \Delta \xi}_{f} \text{ en } \mathbb{R}^N \times [0, t_0]$$

$$(u_t - \Delta u = 0)$$

Observar fue $|v| \leq A$ (constante).
Entonces por el teor de unicidad y usando la sol. fundamental

$$v(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x-y, t-s)\, \tilde{f}(y,s)\, dy\, ds$$

Ahora si tomamos $(x,t) \in C''$ y usamos fue $\xi \equiv 0$ en $\mathbb{R}^N \setminus C$, tenemos fue

$\forall (x,t) \in C''$

$$u(x,t) = \iint_C \phi(x-y,t-s)\left[\left(\xi_s(y,s) - \Delta\xi(y,s)\right)u(y,s) - 2\nabla\xi(y,s)\nabla u(y,s)\right]dy\,ds$$

$\xi(x,t) \equiv 1$

$$= \iint_C \underbrace{\left[\phi(x-y,t-s)\left(\xi_s(y,s) + \Delta\xi(y,s)\right) + 2\nabla_y \phi(x-y,t-s)\nabla\xi(y,s)\right]}_{K(x,t,y,s)} u(y,s)\,dy\,ds$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \iint_C K(x,t,y,s)\, dy\, ds$$

Si $u \notin C^\infty$

$$u_\varepsilon = u * \eta_\varepsilon(x,t)$$

dond. $\eta(y) = \begin{cases} C\, e^{\frac{1}{|y|^2-1}} & \text{si } |y| < 1 \\ 0 & \text{si } |y| \geq 1 \end{cases}$

C se toma p/q $\int_{\mathbb{R}^{N+1}} \eta\, dx = 1$.

obs: $\eta \in C^\infty$

$$\eta_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon^N}\, \eta\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$$

η_ε se denomina el núcleo regularizante estandar.

El resultado vale p/ u_ε $(u_{\varepsilon t} - \Delta u_\varepsilon = 0)$

Pasando al límite se tiene que vale para u. Entonces vale que

$$u(x,t) = \iint_C K(x,t,y,s)\, dy\, ds$$

donde

$k \equiv 0$ on C'

$k \in C^{\infty}(C \setminus C')$

$\Longrightarrow u \in C^{\infty}(C'') \ \blacksquare$

Ecuación del calor
Regularidad

Teorema.

Entonces para cada par de enteros no negativos k, l existe una constante C_{kl} tal que

$$\max\{|D_x^\alpha D_t^l u(y,s)| : (y,s) \in C(x,t;\tfrac{t}{2}\} \leq \frac{C_{kl}}{r^{k+2l+N+2}} \|u\|_{L^1(C(x,t,r))},$$

para todo $|\alpha| = k$, todo cilindro $C(x,t;\frac{r}{2}) \subset C(x,t;r) \subset \Omega_T$ y toda solución u de

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega_T.$$

D/ • Fijemos un punto $(x,t) \in \Omega_T$

Sin perdida de generalidad podemos asumir que $(x,t) = (0,0)$

• Definimos

$$C_1 = C(0,0;1)$$

$$C_{1/2} = C(0,0;1/2)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \iint_{C_{1/2}} K(x,t,y,s)\, u(y,s)\, dy\, ds \quad e\ C_{1/2}$$

$$\Rightarrow |\partial_x^\alpha D_t^\ell u(x,t)| \le \iint_{C_1} |D_t^\ell D_x^\alpha K(x,t,y,s)|\,|u(y,s)|\,dy\,ds$$

$$\le C_{|\alpha|\ell}\, \|u\|_{L^1(C_1)} \quad \text{en } C_{1/2}$$

¿Qué pasa en $C_{\frac{r}{2}} = C(0,0;\frac{r}{2})$?

Reescalo

$$v(x,t) = u(rx, r^2 t)$$

$$\Rightarrow v_t - \Delta v = r^2 u_t(rx, r^2 t) - r^2 \Delta u(rx, r^2 t) = 0$$

en C_1

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\left| D_x^{\alpha} D_t^{\ell} v(x,t) \right|}_{r^{2\ell+|\alpha|} D_x^{\alpha} D_t^{\ell} u(rx,\, r^2 t)} \leq C_{|\alpha|\ell} \, \|v\|_{L^1(C_1)} \quad \text{en } C_{1/2}$$

$$\|v\|_{L^1(C_1)} = \frac{1}{r^{N+2}} \|u\|_{L^1(C_r)}$$

$$\Rightarrow \quad \left| D_x^{\alpha} D_t^{\ell} u(x,t) \right| \leq \frac{1}{r^{2\ell+|\alpha|+N+2}} \|u\|_{L^1(C_r)} \quad \text{en } C_{r/2}$$

Ecuación del calor

Método de energía

Teorema.

Existe a lo sumo una solución $u \in C_1^2(\overline{\Omega}_T)$ del problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{en } \Omega_T, \\ u = g & \text{en } \Gamma_T. \end{cases}$$

D/ 1 Si u, v son dos soluciones entonces $w = u - v$ es solución de

$$w_t - \Delta w = 0 \text{ en } \Omega_T$$
$$w = 0 \text{ en } \Gamma_T$$

Ahora definimos la siguiente "energía"

$$E(t) = \int_\Omega w^2 \, dx \qquad 0 \leq t \leq T$$

$$\Rightarrow E' = 2\int w \, w_t \, dx = 2\int w \, \Delta w \, dx = -2\int |Dw|^2 dx \leq 0$$

$$\Rightarrow E(t) \leq E(0) = 0 \Rightarrow w = 0 \Rightarrow u = v \;\blacksquare$$

Ecuación del calor
Método de energía

Teorema.

Sean $u, v \in C^2(\overline{\Omega}_T)$ soluciones de

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = f & \text{en } \Omega_T, \\ w = g & \text{en } \partial\Omega \times [0, T]. \end{cases}$$

Si $u(x, T) = v(x, T)$ para todo $x \in \Omega$, entonces $u \equiv v$ en Ω_T.

D/ Tomemos $w := u - v$

$$E(t) = \int_\Omega w^2 \, dx \qquad 0 \leq t \leq T$$

$$E'(t) = -2\int_\Omega |Dw|^2 dx$$

$$E''(t) = -4 \int_\Omega Dw \, Dw_t \, dx$$

$$= 4 \int_\Omega \Delta w \, w_t \, dx$$

$$= 4 \int_\Omega (\Delta w)^2 dx$$

Por otro lado

$$\int_\Omega |Dw|^2 dx = -\int_\Omega w \Delta w \, dx \le \|w\|_2 \|\Delta w\|_2$$

$w=0$ en $\partial\Omega$

$$\Rightarrow (E')^2 = 4\left(\int_\Omega |Dw|^2\right)^2 \le \underbrace{\left(\int_\Omega w^2 dx\right)\left(4\int_\Omega (\Delta w)^2 dx\right)}_{= \, E(t)\, E''(t)}$$

así $E(t)=0 \quad \forall\, 0 \le t \le T$ ✓

En otro caso $\exists [t_1, t_2] \subseteq [0, T]$ tal que

$$E(t) > 0 \quad \text{en } [t_1, t_2)$$

$$E(t_2) = 0$$

Definimos

$$f(t) = \log E(t) \quad \text{en } [t_1, t_2)$$

$$f''(t) = \frac{E''}{E} - \frac{E'}{E^2} \geq 0$$

$\Rightarrow f$ es convexa en $(t_1\, t_2)$

$\therefore f((1-r)t_1 + rt) \leq (1-r) f(t_1) + r f(t)$

para todo $0 < r < 1$ y $t_1 < t < t_2$

$\Rightarrow E((1-r)t_1 + rt) \leq E(t_1)^{1-r} E(t)^{r}$

$$\Big\downarrow\ t \to t_2$$

$E((1-r)t_1 + rt) \leq 0$ Absurdo

Soluciones débiles - Espacios de Sobo:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

Si $f \in C(\Omega) \longrightarrow u \in C^2$

Si $f \notin C(\Omega) \longrightarrow$ ¿$\exists u$?

Si existe seguro no es C^2

Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$-\Delta u = f$$

$$\longrightarrow -\Delta u \varphi = f \varphi$$

$$\longrightarrow \int -\Delta u \varphi \, dx = \int f \varphi \, dx$$

$$\parallel$$

$$\int \nabla u \nabla \varphi \, dx$$

u es solución si

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

¿la condición de borde?

Espacios de Sobolev
Definición

Definición

Sea Ω un conjunto abierto y $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ se define de la siguiente manera: Decimos que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si $u \in L^p(\Omega)$ y existen $g_1, \dots, g_N \in L^p(\Omega)$ tales que

$$\int_\Omega u \frac{d\varphi}{dx_i} dx = -\int_\Omega g_i \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Esta claro que $C_c^\infty(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$

Espacios de Sobolev
Definición

Notación.

- $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$;
- Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ definimos

$$\frac{du}{dx_i} = g_i \quad \text{y} \quad \nabla u = \left(\frac{du}{dx_1}, \ldots, \frac{du}{dx_N}\right).$$

Ej $u(x) = |x|^{-\gamma}$ con $\gamma > 0$, $\Omega = B_1(0)$

$\Rightarrow u \in C^1(\Omega \setminus \{0\})$

▶ ¿ $u \in L^p(\Omega)$?

$u \in L^p(\Omega) \Leftrightarrow |x|^{-\gamma p} \in L^1(\Omega)$

$\Leftrightarrow \gamma p < N$

$\Leftrightarrow \gamma < N/p$

▶ $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = -\gamma \dfrac{x_i}{|x|^{\gamma+2}} \Rightarrow \left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right| = \gamma^p \left(\dfrac{|x_i|}{|x|^{\gamma+2}}\right)^p$.

$$\Rightarrow \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p \leq \gamma \frac{1}{|x|^{(\gamma+1)p}} \in L^1(\Omega)$$

$$\Leftrightarrow (\gamma+1)p < N$$

$$\Leftrightarrow \gamma < \frac{N}{p} - 1$$

Tenemos que pedir que $N > p$

$$-\int_{B_1(0)\setminus B_\varepsilon(0)} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = \int_{B_1(0)\setminus B_\varepsilon(0)} \frac{\partial f}{\partial x_i} \phi\, dx + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} f \varphi \cdot \eta_i\, ds$$

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Además

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u \varphi \eta_i \, ds \right| \leq \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \varepsilon^{-\gamma} |\phi| \, ds$$

$$\leq N \omega_N \|\phi\| \varepsilon^{N-1-\gamma} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

$$\text{xq } \gamma \leq \frac{N}{p} - 1 \underset{p \geq 1}{<} N - 1 \checkmark$$

$$\therefore u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \forall \gamma \in \left(0, \frac{N-p}{p}\right) \text{ con } p < N$$

Ej $\Omega = [-1, 1]$

$u = \chi_{[-1/2, 1/2]} \notin W^{1,p}(\Omega) \quad \forall p$

$$\int_{B_1(0)} u \, \varphi' \, dx = -\int_{B_1(0)} g \, \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Si el soporte de φ no interseca la $[-1/2, 1/2]$ o esta contenido en $[-1/2, 1/2]$ resulta fue

$$0 = -\int_\Omega g \, \varphi \, dx$$

$\Rightarrow g = 0$ cte punto en $[-1, 1]$

Pero si $\operatorname{Sop} \varphi \supseteq [-1/2, 1/2]$

$$-\left(\varphi(1/2) - \varphi(-1/2)\right) = \int_{\mathbb{R}^N} g \varphi \, dx = 0$$

$g = 0$ ctp

Absurdo

Las funciones características no están en $W^{1,p}$

Espacios de Sobolev
Definición

Teorema.

- $W^{1,p}(\Omega)$ equipado con la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \|\frac{du}{dx_i}\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}$$

  es un espacio de Banach.
- $W^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo si $1 < p < \infty$;
- $W^{1,p}(\Omega)$ es separable si $1 \leq p < \infty$;
- $H^1(\Omega)$ es un especio de Hilbert.