Espacios de Sobolev
Definición

Teorema.

- $W^{1,p}(\Omega)$ equipado con la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \|\frac{du}{dx_i}\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}$$

  es un espacio de Banach.
- $W^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo si $1 < p < \infty$;
- $W^{1,p}(\Omega)$ es separable si $1 \leq p < \infty$;
- $H^1(\Omega)$ es un especio de Hilbert.

Espacios de Banach

Definición

Sea X un espacio lineal real.

Definición.

Un mapa $\|\| : X \to [0, \infty)$ se denomina una norma si

- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ para todo $u, v \in X$;
- $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$ para todo $u \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$;
- $\|u\| = 0$ si y solo si $u = 0$.

Espacios de Banach
Definición

Definición

Decimos que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converge a $u \in X$, y escribimos

$$u_n \to u$$

si

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0.$$

Espacios de Banach
Definición

Definición.

- Decimos que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es una sucesión de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$\|u_n - u_m\| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_0.$$
- X es completo si toda sucesión de Cauchy en X converge.
- Un espacio X es de Bananch si es un epacio lineal normado y completo.
- Un espacio X es de Separable si es un contiene un denso numerable.

D) $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach

D/ $p=\infty$

Sea u_n una sucesión de Cauchy en L^∞

Dado $k \geq 1$ $\exists\, n_0^k$ t.q. $\|u_n - u_m\| < \frac{1}{k}$

para todo $n, m \geq n_0$

$\therefore\ \exists\, E_k \subset \Omega$ de medida cero tal que

$$|u_n(x) - u_m(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega \setminus E_k$$
$$\forall\, n, m \geq n_0^k$$

Tomo $E = \bigcup E_k$ $\quad (|E| = 0)$

$\forall x \in \Omega \setminus E \longrightarrow u_n(x)$ es de Cauchy

$$\therefore \quad u(x) = \lim_{n \to \infty} u_n(x)$$

$$|u_n(x) - u_m(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega \setminus E_k$$
$$\forall n, m \geq n_0^k$$

$$\Big\downarrow m \to \infty$$

$$|u(x) - u_n(x)| \leq 1/k \quad \forall x \in \Omega \setminus E_k$$
$$n \geq n_0^k$$

$\Rightarrow u \in L^\infty(\Omega)$ y $\|u - u_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}$ $\forall n \geq n_0^k$

$\therefore u_n \longrightarrow u$ en $L^\infty(\Omega)$

$1 \leq p < \infty$ u_n es de. Cauchy en $L^p(\Omega)$

Basta ver que una subsucesion converge en L^p

Tomo u_{n_k} tq $\|u_{n_{k+1}} - u_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k}$ $\forall k \geq 1$

Af. $u_{n_k} \longrightarrow u$ en L^p

Def $v_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |u_{n_{k+1}}(x) - u_{n_k}(x)|$

Obs $\|v_n\|_p \leq 1$

$v_n(x) \leq v_{n+1}(x) \Rightarrow v(x) = \lim v_n(x)$ ctp

$v(x) \in L^p(\Omega)$

teor de convergencia monotona

$j \geq k \geq 2$

$|u_{n_j}(x) - u_{n_k}(x)| \leq \sum_{i=k}^{j-1} |u_{i+1}(x) - u_i(x)| \leq v(x) - v_{j-1}(x)$

$\Rightarrow u_k(x)$ es de Cauchy y converge a $u(x)$

$\Rightarrow \quad |u_k(x) - u(x)| \leq U(x) \quad \forall k \geq 2$

$\Rightarrow \quad u \in L^p$

Finalmente por el teor de convergencia dominada $u_k \longrightarrow u$ en L^p.

▸ Veamos que $L^p(\mathbb{R}^N)$ es separable $1 \leq p < \infty$

$R = \prod_{k=1}^{N} (a_k, b_k) \quad a_k, b_k \in \mathbb{Q}$

$\mathcal{E}$ = el $\mathbb{Q}$-espacio vectorial generado por $\{\chi_R\}$

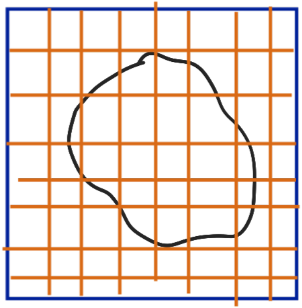
↳ Es numerable (Tarea)

$\Rightarrow$ $\mathcal{E}$ es numerable (Tarea)

$\overline{\mathcal{E}}^{L^p} = L^p(\mathbb{R}^N)$

$f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \, f_\varepsilon \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ tq $\|f - f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon$

Como $f_\varepsilon \in C^1_c$, Dado $\delta > 0$



$R = \bigcup R_i$

$|\sup_{R_i} f_\varepsilon - \inf_{R_i} f_\varepsilon| < \delta$

Podemos construir $g \subset \mathcal{E}$ tal que

$g = 0$ en $\mathbb{R}^N \setminus R$ y $\|g - f_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \delta$

$\Rightarrow \|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon + \underbrace{\delta |R|}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon$

Prop. Sea E un espacio metrico separable si $F \subset E$ entonces F es separable

D/ $\overline{\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}} = E$

$r_m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

$\exists\, a_{mn} \in B(u_n, r_m) \cap F \neq \emptyset$

$\Rightarrow \overline{\{a_{m,n}\}} = F$

Numerable ■

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n) \qquad \underline{\text{separable}}$$

$$f \longrightarrow f\chi_\Omega$$

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \times \cdots \times L^p(\Omega)$$

$$f \longrightarrow \left(f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

Espacios de Banach
Operadores lineales

Sean X, Y dos espacios de Banach.

Definición.

- Un mapa $A\colon X \to Y$ es un operador lineal si si
$$A(\lambda u + \mu v) = \lambda Au + \mu Av \quad \forall u, v \in X, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$
- Un operador lineal $A\colon X \to Y$ es un acotado si
$$\|A\| := \sup\{\|Au\|_Y : \|u\|_X \leq 1\} < \infty.$$

Espacios de Banach

Operadores lineales

Definición.

- Un operador lineal acotado $F\colon X \to \mathbb{R}$ se denomina un funcional lineal acotado.
- El espacio de todos los funcionales lineales acotados en X se denomina el espacio dual de X y se denota con X^*.
- Un espacio de Banach es reflexivo si $(X^*)^* = X$.

	Banach	Separable	Reflexivo	Espaco Dual
L^p $1<p<\infty$	✓	✓	✓	$L^{p'}$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right)$
L^1	✓	✓	No	L^∞
L^∞	✓	No	No	$(L^\infty)^* \supsetneq L^1$

<u>Prop</u> Si E es un espacio reflexivo y $M \subset E$ es un subespacio lineal cerrado de E entonces M es reflexivo (Ver el Brezis)

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \underbrace{L^p(\Omega) \times \ldots \times L^p(\Omega)}_{\text{Es reflexivo}}$$

Espacios de Banach
Producto interno

Sea H un espacio lineal real.

Definición.

Un mapa $\langle , \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ es un producto interno si

- $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ para todo $u, v \in H$.
- El mapa $u \to \langle u, v \rangle$ es lineal para cada $v \in H$.
- $\langle u, u \rangle \geq 0$ para todo $u \in H$.
- $\langle u, u \rangle = 0$ si y solo si $u = 0$.

Espacios de Banach

Espacios de Hilbert

Definición.

El espacio H es un Hilbert si es un espacio de Banach con la norma generada por el producto interno.

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

$$\langle u, v \rangle = \int uv + \int \nabla u \nabla v$$

Espacios de Banach

Teorema de representación de Riesz

Teorema.

Sea H un espacio de Hilbert con producto interno $\langle , \rangle$. Entonces para cada $F \in H^*$ existe una única $u \in H$ tal que

$$F(v) = \langle u, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

Convergencia Debil

Sea E un espacio de Banach.

Decimos que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge debil a u si

$$F(u_n) \longrightarrow F(u)$$

Tarea $u_n \longrightarrow u \Longrightarrow u_n \longrightarrow u$

$u_n \rightharpoonup u \quad F \in E^*$

$$F(u_n) \leq \|F\|_{E^*} \|u_n\|_E$$

$$\frac{F(u)}{\|F\|} \leq \liminf \|u_n\|_E \quad \forall F \in E^* \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow \sup_{\substack{F \in E^* \\ \|F\| \leq 1}} \frac{F(u)}{\|F\|} \leq \liminf \|u_n\|_E$$

obs $\displaystyle\sup_{\substack{F\in E^* \\ \|F\|\leq 1}} \frac{F(u)}{\|F\|_{E^*}} = \|u\|_E$

$$\frac{F(u)}{\|F\|_{E^*}} \leq \|u\|_E \checkmark$$

La otra desigualdad es mas complicada
Ver por ej. el Brezis
Tambien se puede ver que $|u|$ es acotada

Tcor Sea E es un espacio de Banach reflexivo. Si $\{u_n\}$ es acotado entonces $\exists \{u_{k_n}\}$ y $u \in E$ t.q. $u_{k_n} \rightharpoonup u$.

Def $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}}$

$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,p}(\Omega)$

$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Longrightarrow$ "$u = 0$ en $\partial\Omega$"

Teor de Trazas

Prop Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

D/ (1) Las funciones en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ de sop comp son densas en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

(2) $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

$$u * \eta_\varepsilon \longrightarrow u \text{ en } W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

$$\eta(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & |x|<1 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N}\eta\left(\frac{x}{|\varepsilon|}\right)$$

Si tenemos (1) y (2). Dado $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y $\delta > 0$ $\exists\, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ con sop compacto tq $\|u-v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} < \delta/2$

$v_\varepsilon = \eta_\varepsilon * v \longrightarrow v$ e $W^{1,p}(\Omega)$

$\Rightarrow \|v_\varepsilon - v\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \delta/2 \quad \forall \varepsilon > \varepsilon_0$

sop v_ε es compacto xq

sop v es compacto

$\Rightarrow \|v_\varepsilon - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \delta \quad \forall \varepsilon > \varepsilon_0$

Veamo 1

Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$

$\varphi \equiv 1$ en $B(0,1)$ y $\varphi \equiv 0$ en $\mathbb{R}^N \setminus B(0,2)$

$0 \leq \varphi \leq 1$ en $\mathbb{R}^N$

$|D\varphi| \leq C$ en $\mathbb{R}^N$

$\varphi_k(x) = \varphi\left(\frac{x}{k}\right) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$

$\varphi_k \equiv 1$ en $B(0,k)$ y $\varphi_k \equiv 0$ en $\mathbb{R}^N \setminus B(0,2k)$

Si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ entonces

$\varphi_k u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (Tarea)

$$\|u - \varphi_k u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p (1-\varphi_k)^p \, dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p (1 - \chi_{B(0,k)}) \, dx$$

$$\xrightarrow{} 0$$

TCD

$$\|\nabla u - \nabla\varphi_k u - \varphi_k \nabla u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p (1-\varphi_k)^p \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_k|^p u^p \, dx$$

$$\le \int_{B(0,k)^c} |\nabla u|^p \, dx + \int_{B(0,k)} \underbrace{|\nabla \varphi_k|^p}_{\le \frac{C}{k}} u^p \, dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} |Du|^p \left(1-\chi_{B(0,k)}\right) dx$$

$$+ \left(\frac{C}{k}\right)^p \int_{\mathbb{R}^N} u^p \, dx \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

Tarea mostrar 2 ∎

si $(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)^\circ = \emptyset$ entonces

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subsetneq W^{1,p}(\Omega)$$

▶ Teor de Extensión $1 \leq p \leq \infty$

Sea Ω abierto acotado con $\partial\Omega \in C^1$

Si $\Omega \subset\subset \tilde{\Omega}$ abierto y acotado entonces

$\exists\ E : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\tilde{\Omega})$ tq

- $E(u) = u$ ctp Ω $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$
- $\operatorname{sop}(Eu) \subset \tilde{\Omega}$
- $\|Eu\|_{W^{1,p}(\tilde{\Omega})} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

$C \rightarrow$ Depende de N Ω $\tilde{\Omega}$