Ecuaciones

Repaso

- $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach
- $W^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo si $1 < p < \infty$
- $W^{1,p}(\Omega)$ es separable si $1 \leq p < \infty$
- $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert
- Convergencia Débil

Sea E un espacio de Banach. Decimos que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ converge débil a u si

$$F(u_n) \longrightarrow F(u) \quad \forall F \in E^*$$

- $u_n \rightharpoonup u \Rightarrow \|u\|_E \leq \liminf \|u_n\|_E$

  u_n es acotada en E

- Si E es un espacio de Banach reflexivo y $\{u_n\}$ es acotada en E entonces existe $\{u_{n_j}\}$ subsucesión de $\{u_n\}$ y $u \in E$ tq

  $u_n \rightharpoonup u$

$\boxed{\text{Teor de trazas} \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega}$

- $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}}$

  $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$

  $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \quad 1 \leq p < \infty$

  $W_0^{1,p}(\Omega) \subsetneq W^{1,p}(\Omega)$ si $(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)^\circ \neq \emptyset$

Teor de Extensión

Sean $1 \leq p \leq \infty$, Ω un abierto acotado con $\partial\Omega \in C^1$

Si $\Omega \subset\subset \tilde{\Omega}$ abierto y acotado entonces

existe $E: W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\tilde{\Omega})$ tq para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$

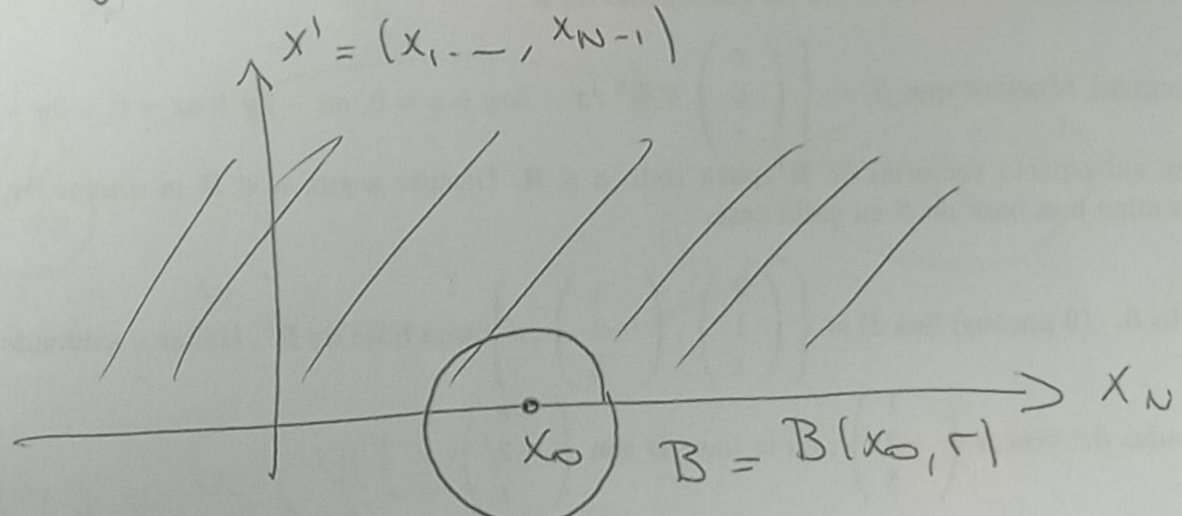
se tiene ~~para~~

- $E(u) = u$ ctp en Ω
- $\mathrm{Sop}(Eu) \subsetneq \tilde{\Omega}$
- $\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C(N, \Omega, \tilde{\Omega}, p) \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

Notación Eu es una extensión de u a $\mathbb{R}^N$

D/ Fijemos $x_0 \in \partial\Omega$

Supongamos



Definimos

$$B^+ = B(x_0, r) \cap \{x_N \geq 0\} \subset \overline{\Omega}$$

$$B^- = B(x_0, r) \cap \{x_N < 0\} \subset \mathbb{R}^N \setminus \Omega$$

Tomandolo suficientemente chico

$$\Longrightarrow \int_B |\tilde{u}|^p dx \leq (1+3^p+4^p 2^N) \int_{B^+} |u|^p dx$$

$$\int_B |\tilde{u}_{x_i}|^p dx \leq (1+3^p+4^p 2^N) \int_{B^+} |u_{x_i}|^p dx \quad 1 \leq i \leq N-1$$

$$\int_B |\tilde{u}_{x_N}|^p dx \leq \int_{B^+} |u_{x_N}|^p dx + 3^p \int_{B^-} |u_{x_N}(x', -x_N)|^p dx$$

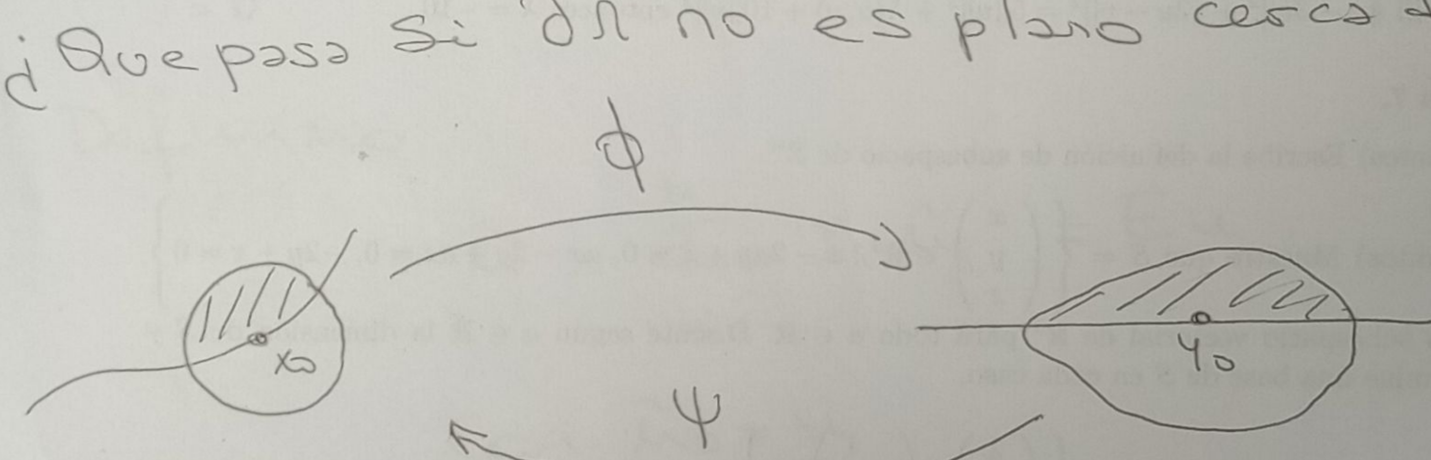
$$+ 2^p \int_{B^-} \left|u_N\left(x', -\frac{x_N}{2}\right)\right|^p dx$$

$$\leq (1+3^p+2^p 2^N) \int_{B^+} |u_{x_N}|^p dx$$

$$\Longrightarrow \|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(B)} \leq C(N,p) \, \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

↳ No depende de u

¿Que pasa si $\partial\Omega$ no es plano cerca de x_0?



$$u'(y) = u(\Psi(y))$$

$$\|\tilde{u}'\|_{W^{1,p}(B)} \leq C \|u'\|_{W^{1,p}(B^+)}$$

$$\Downarrow$$

$$\|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(W)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Ahora vamos a usar que $\partial\Omega$ es compacto

$\exists \{(x_0^i, \omega_i, \tilde{u}_i)\}_{i=1}^{k}$ tq $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{k} \omega_i$

Tomo $\omega_0 \subset\subset \Omega$ tq $\Omega \subset \bigcup_{i=0}^{k} \omega_i$

Sea $\{\xi_i\}_{i=0}^{k}$ una partición de la unidad asociada a la flia $\{\omega_i\}_{i=0}^{k}$ es decir

- $\xi_i \in C^\infty \quad \forall\, 0 \le i \le k$
- $0 \le \xi_i \le 1 \quad \forall\, 0 \le i \le k$
- $\operatorname{sop} \xi_i$ es compacto, $\operatorname{sop} \xi_i \subset \omega_i \quad \forall\, 0 \le i \le k$
- $\sum_{i=0}^{k} \xi_i \equiv 1$ en Ω

Definimos

$$\tilde{u} = \sum_{i=0}^{k} \xi_i \tilde{u}_i = Eu$$

con $\tilde{u}_0 = u$

$$\Rightarrow \tilde{u} \in W_0^{1,p}(\tilde{\Omega}) \subseteq W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

$$\|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \le C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

C No depende de u

Obs: Eu es lineal

Todas las cuentas las hicimos asumiendo que

$u \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Como $\overline{C(\bar{\Omega})}^{W^{1,p}(\Omega)} = W^{1,p}(\Omega)$

el resultado se sigue por densidad

Acá es donde se usa que la C no depende de u.

Teorema de traza

Sean $1 \leq p < \infty$ y Ω un abierto acotado con $\partial\Omega \in C^1$. Entonces existe un operador lineal y acotado

$$T : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$$

tal que

(i) $Tu = u|_{\partial\Omega}$ si $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

(ii) $\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$

No depende de u
Depende de p y Ω

Notación: Tu es la traza de u sobre $\partial\Omega$.

Teorema de traza-cero

Sean $1 \leq p < \infty$ y Ω un abierto acotado con $\partial\Omega \in C^1$

Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ entonces

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \iff Tu = 0 \text{ en } \partial\Omega$$

D/ de estos 2 resultado Santiago el 14/06.

Desigualdades de Sobolev (caso $\mathbb{R}^N$)

Teor (Sobolev - Galiardo - Niremberg)

Sea $1 \leq p < N$. Entonces

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \quad \text{donde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},$$

y existe una constante $C = C(p, N)$ t.q.

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

para todo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

Notación: p^* se denomina el exponente crítico de Sobolev

Comentario

$u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \quad u \neq 0$

$$u_\lambda(x) = u(\lambda x) \Rightarrow \|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{\lambda^{N/q}} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}$$

$$Du_\lambda(x) = \lambda Du(\lambda x) \Rightarrow \|Du_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \lambda^{1-\frac{N}{p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

Si $\|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C \|Du_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \Rightarrow$

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C \lambda^{1-\frac{N}{p}+\frac{N}{q}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

Si $1 - \frac{N}{p} + \frac{N}{q} < 0 \underset{\lambda \to \infty}{\Longrightarrow} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} = 0$ Absurdo

Si $1 - \frac{N}{p} + \frac{N}{q} > 0 \underset{\lambda \to 0}{\Longrightarrow} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} = 0$ Absurdo

Entonces la unica posibilidad es $1 - \frac{N}{p} + \frac{N}{q} = 0$

Es decir

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} \quad \text{el crítico de Sobolev}$$

$$\Rightarrow f = p^* = \frac{Np}{N-p} \quad (p < N)$$

La prueba del teor de Sobolev-Galiardo-Nirenberg se basa en el siguiente lema

<u>Lema</u> Sean $N \geq 2$ y $f_1 \dots f_N \in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$

P/ $x \in \mathbb{R}^N$ y $1 \leq i \leq N$ definimos

$$\tilde{x}_i = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$$

Entonces la función

$$f(x) = f_1(\tilde{x}_1) f_2(\tilde{x}_2) \dots f_N(\tilde{x}_N) \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

$$\text{y} \quad \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})}$$

D/ $N = 2$

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2)|\, dx_2 \int_{\mathbb{R}} |f_2(x_1)|\, dx_1 \checkmark$$

$N = 3$

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx_3\, dx_2\, dx_1 = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f_3(x_1, x_2)| \int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2, x_3)| |f_2(x_1, x_3)|\, dx_3\, dx_2\, dx_1$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f_3(x_1, x_2)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2, x_3)|^2 dx_3\right)^{1/2} dx_2 \left(\int_{\mathbb{R}} |f_2(x_1, x_3)|^2 dx_3\right)^{1/2} dx_1$$

Hölder

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_3(x_1, x_2)|^2 dx_2\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_2(x_1, x_3)|^2 dx_3\right)^{1/2} dx_1 \, \|f_1\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

Aplicando una vez mas Holder tenemos

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \leq \|f_1\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|f_2\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|f_3\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

Ahora usamos el proceso Inductivo

lo suponemos verdadero $P/_N$ y lo probamos

$P/_{N+1}$. Fijemos x_{N+1}

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\, dx_1 \dots dx_N \leq$$

$$\leq \|f_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |f_1 f_2 \dots f_N|^{N'} dx_1 \dots dx_N \right]^{1/N'}$$

Holder $\frac{1}{N} + \frac{1}{N'} = 1 \longrightarrow N' = \frac{N}{N-1}$

Aplicando el proceso Inductivo a $g = |f_1|^{N'} \dots |f_N|^{N'}$

obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f_1|^{N'} \dots |f_N|^{N'} dx_1 \dots dx_N \leq \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|^{N'}_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\, dx_1 \dots dx_N \leq \|f_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})}$$

$$\Longrightarrow \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^{N+1})} \leq \prod_{i=1}^{N+1} \|f_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}$$

Holder

Holder

si $f_i \in L^{p_i}$ $1 \leq i \leq k$ con $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1$

$\Rightarrow f = f_1 \dots f_i \in L^p$ y $\|f\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \|f_2\|_{L^{p_2}} \dots \|f_k\|_{L^{p_k}}$

Demo del teor de Sobolev-Galiardo-Nirenberg

Por "densidad" alcanza con verlo p/ $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$

- Caso 1 $p=1$

$$|u(x_1, x_2, \dots, x_N)| = \left| \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_N)\, dt \right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_N) \right| dt$$

De manera similar se puede ver que

$$|u(x_1, x_2, \dots, x_N)| \leq f_i(\tilde{x}_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_N) \right| dt$$

$$\Longrightarrow |u(x)|^N \leq \prod_{i=1}^N f_i(\tilde{x}_i)$$

$$\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} dx \leq \prod_{i=1}^N \| f_i \|_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})}^{\frac{1}{N-1}}$$

Por el lema anterior

$$\leq \prod_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N-1}}$$

$$\Longrightarrow \| u \|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{1/N}$$

$$\leq \| Du \|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$$

- Caso 2 $1 < p < \infty$

$$\omega(x) = |u|^{m-1} u \qquad m \geq 1$$

$$\| \omega \|_{L^{N/N-1}(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^N \left\| \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}}$$

$$\| u \|^m_{L^{\frac{mN}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq m \prod_{i=1}^N \left\| |u|^{m-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{1/N}$$

Aplico Holder

$$\|u\|^{m}_{L^{\frac{mN}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq m \|u\|^{m-1}_{L^{p'(m-1)}(\mathbb{R}^N)} \prod_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^{1/N}_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

Tomamos m t.q. $\frac{mN}{N-1} = p'(m-1)$

$$\Longrightarrow m = \frac{(N-1)p^*}{N}$$

Tarea ver que $m > 1$

$$\Longrightarrow \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq m \prod_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^{1/N}_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

$$\leq m \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

para todo $u \in C^1_c(\mathbb{R}^N)$

Recuerdo que el resultado se tiene por "densidad." ∎

<u>Corolario</u> Sea $1 \leq p < N$. Entonces

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [p, p^*].$$

↳ Inyección continua

D/ $q \in [p, p^*] \Rightarrow \exists \alpha \in [0,1]$ t.q.

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*}$$

$$\Rightarrow \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|^{\alpha}_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|u\|^{1-\alpha}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$$

uso el teo de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg ∎

Corolario (el caso límite $p=N$)

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \geq N$$

D/ Asumimos que $u \in C^1_c(\mathbb{R}^N)$

$$w(x) = |u|^{m-1} u$$

$$\|w\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}}$$

$$\|u\|^m_{L^{\frac{mN}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq m \|u\|^{m-1}_{L^{\frac{(m-1)N}{N-1}}} \|Du\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \quad \forall m > 1$$

$$\Longrightarrow \|u\|_{L^{\frac{mN}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq m^{\frac{1}{m}} \|u\|^{\frac{m-1}{m}}_{L^{\frac{(m-1)N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \|Du\|^{\frac{1}{m}}_{L^N(\mathbb{R}^N)}$$

$$\leq m^{1/m} \left(\frac{\|u\|^{\frac{m-1}{m}\frac{m}{m-1}}_{L^{\frac{(m-1)N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)}}{\frac{m}{m-1}} + \frac{\|Du\|^{\frac{1}{m}m}_{L^N(\mathbb{R}^N)}}{m} \right)$$

Desigualdad de Young

$$\frac{m-1}{m} + \frac{1}{m} = 1$$

$$\leq m^{1/m} \left(\|u\|_{L^{\frac{(m-1)N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} + \|Du\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \right).$$

Tomando $m = N$ tenemos que

$$\|u\|_{L^{\frac{N^2}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}$$

Luego por interpolación tenemos que

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}$$

para todo $q \in \left[N, \frac{N^2}{N-1}\right]$. Reiterando este argumento con $m = N+1$, $m = N+2, \ldots$ tenemos que

$$\|u\|_q \leq C \|u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)} \quad \forall u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$$

C → Independiente de u

P/todo $q \in [N, +\infty)$ con constante dependiendo de q y N. El resultado se sigue por densidad.

Resumen

Si $1 \leq p < N \Rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \ \forall q \in [p, p^*]$

$p = N \Rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \ \forall q \in [N, +\infty)$

$$\boxed{\frac{pN}{N-p} = p^*}$$

¿Qué pasa para $p \geq N$?

<u>Teorema de Morrey</u> Sea $p > N$. Entonces

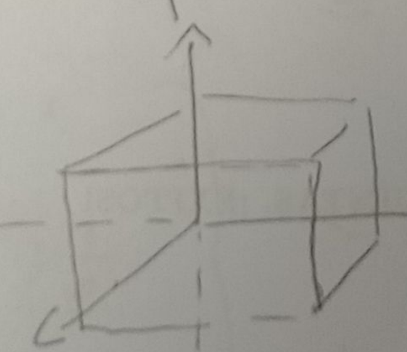
① $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$

Además para todo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ se tiene que

② $|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ ctp $x, y \in \mathbb{R}^N$

donde $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ y C es una constante (depende solamente de p y N)

D/ Asumimos que $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$



→ Q un cubo abierto que contiene al 0 cuyos lados tienen longitud r y son paralelos a los ejes de coordenadas

P/ $x \in Q$ $\quad u(x) - u(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u(tx)\,dt$

$$\Rightarrow |u(x)-u(0)| \le \int_0^1 \sum_{i=1}^N \underbrace{|x_i|}_{\le r} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| dt$$

$$\le r \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| dt$$

Sea

$$\bar{u} = \frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)\,dx$$

$$\Rightarrow |\bar{u} - u(0)| \le \frac{r}{|Q|}\int_Q dx \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| dt$$

$$= \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^1 dt \sum_{i=1}^N \int_Q \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(\underbrace{tx}_{y})\right| dx$$

$$= \frac{1}{r^{N-1}}\int_0^1 \frac{dt}{t^N} \sum_{i=1}^N \underbrace{\int_{tQ} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(y)\right| dy}_{\le \left(\int_Q \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} |tQ|^{1/p'}}$$

$$\le \frac{r^{N/p'}}{r^{N-1}} \int_0^1 \frac{t^{N/p'}}{t^N}\, dt\, \|Du\|_{L^p(Q)}$$

$$\le r^{N/p'-N+1} \left. \frac{t^{N/p'-N+1}}{N/p'-N+1} \right|_0^1 \|Du\|_{L^p(Q)}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} &= 1 \\ \frac{1}{p'} - 1 &= -\frac{1}{p} \\ \frac{N}{p'} - N &= -\frac{N}{p} \end{aligned}\right\} \qquad \le \frac{r^{\frac{p-N}{N}}}{\frac{p-N}{p}} \|Du\|_{L^p(Q)}.$$

Por traslación esto vale p/cualquier cubo con lados paralelos a los ejes y de longitud r

$$|\bar{u} - u(x)| \leq \frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1 - N/p} \|Du\|_{L^p(Q)} \quad \forall x \in Q$$

$$\Rightarrow |u(x) - u(y)| \leq |\bar{u} - u(x)| + |\bar{u} - u(y)|$$

$$\leq 2\frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} \|Du\|_{L^p(Q)} \quad \forall x\, y \in Q$$

Dados dos punto $x\, y \in \mathbb{R}^N$ $\exists Q$ un cubo con lados $r = 2|x-y|$ que contiene a x, y y cuyos lados son paralelos a los ejes

$$\Rightarrow |u(x) - u(y)| \leq \frac{2^2}{1-N/p} |x-y|^{1-N/p} \|Du\|_{L^p(Q)}$$

$$\forall u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$$

$$\forall x\, y \in \mathbb{R}^N$$

El resultado se sigue por densidad

Ya probamos ② Ahora veamos ①

$$|u(x)| \leq |\bar{u}| + C\|Du\|_{L^p(Q)} \qquad \boxed{u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)}$$

$$\underset{\text{Holder}}{\leq} C\|u\|_{W^{1,p}(Q)}$$

$$\leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \qquad C \text{ depende solo de } p \text{ y } N$$

El resultado se tiene por densidad ∎

Resumen

- $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ $\quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ si $p<N$
- $W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{q}(\mathbb{R}^N)$ $\quad \forall\, q \geq N$
- $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ $\quad$ si $p > N$

$$\hookrightarrow C^{\alpha}(\mathbb{R}^N) \quad \alpha = 1 - \frac{N}{p}$$

Corolario

Si Ω es un abierto acotado con $\partial\Omega \in C^1$

Entonces

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \quad p^* = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} \text{ si } p<N$$

$$W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega) \quad \forall\, q \in [N, +\infty)$$

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega) \text{ si } p>N$$

Además si $p>N$

$$|u(x)-u(y)| \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} |x-y|^{\alpha} \quad \text{a.e. } x,y\in\Omega \quad (*)$$

donde $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ y depende solo de Ω, p y N.

D/ Los resultados anteriores + Extensión.