## Resumen

- $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ $\quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ si $p<N$
- $W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{q}(\mathbb{R}^N)$ $\quad \forall\, q \geq N$
- $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ si $p>N$

$$\hookrightarrow C^{\alpha}(\mathbb{R}^N) \quad \alpha = 1 - \frac{N}{p}$$

## Corolario

Si $\Omega$ es un abierto acotado con $\partial\Omega \in C^1$

Entonces

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \quad p^* = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} \quad \text{si } p<N$$

$$W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega) \quad \forall\, q \in [N, +\infty)$$

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega) \quad \text{si } p>N$$

Además si $p>N$

$$|u(x)-u(y)| \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} |x-y|^{\alpha} \quad \text{a.e. } x,y \in \Omega \quad (*)$$

donde $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ y depende solo de $\Omega$, $p$ y $N$.

D/ Los resultados anteriores + Extensión.

Teor (Rellich-Kondrachov)

Sea $\Omega$ un abierto acotado con $\partial\Omega \in C^1$

Entonces se tienen las siguientes inyecciones compactas

- $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*)$ donde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ si $p<N$
- $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, \infty)$
- $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^\beta(\overline{\Omega}) \quad \forall p > N \quad 0 < \beta < 1 - \frac{N}{p}$

D/ $\boxed{p > N}$ Se tiene por el teor de Arzela-Ascoli y $\circledast$.

$\boxed{p = N}$ tarea

$\boxed{p < N}$ Fijemo $q \in [1, p^*)$

Sabemos $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Tenemos que mostrar que si $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ es acotada en $W^{1,p}(\Omega)$ $\exists \{u_{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$ subsucesion de $\{u_m\}$ que converge en $L^q(\Omega)$

Por el teorema de extension podemos asumir que $u_m \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y tienen soporte compacto contenido en ~~un~~ conjunto abierto y acotado $\tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^N$

también podemos asumir que

$$\sup_m \|u_m\|_{W^{1,p}(\tilde{\Omega})} < \infty$$

tomemos $\rightarrow$ regularizador estandar

$$u_m^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u_m$$

Podemos asumir que $\operatorname{sop} u_m^\varepsilon \subset \tilde{\Omega}$

**Af 1** $u_m^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} u_m$ en $L^p(\tilde{\Omega})$ uniformemente en $m$

**Af 2** P/c $\varepsilon > 0$ se tiene que $\{u_m^\varepsilon\}_{m=1}^\infty$ es uniformente acotada y equicont.

**Af 3** Fijemos ahora $\delta > 0$. Mostremos que existe una subsucesión $\{u_{m_j}\}_{j=1}^\infty \subset \{u_m\}_{m=1}^\infty$ tq

$$\limsup_{j,k \to \infty} \|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^p(\tilde{\Omega})} < \delta$$

Para finalizar $\delta = 1, 1/2, 1/3 \ldots$ se aplica la def. de la Af 3 y se usa el argumento diagonal y se tiene el resultado.

Detalles ver el Evans $\blacksquare$

# Desigualdad de Poincare

Sea $\Omega$ un abierto acotado con $\partial\Omega \in C^1$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces

1.- Existe una constante $C$ (que depende de $N$, $\Omega$ y $p$) tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

2.- Existe una constante $C$ (que depende de $N$, $\Omega$ y $p$) tal q

$$\|u-(u)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

donde $(u)_\Omega = \fint_\Omega u\,dy$

Cuando $\Omega = B(x,r)$ entonces $C = \tilde{C}r$ donde $\tilde{C}$ depende de $N$ y $p$.

D/ 1. Supongamos que no entonces $\forall n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tq

$$\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \geq n\|Du_n\|_{L^p(\Omega)}$$

Podemos suponer que $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} = 1$. Entonces $\frac{1}{n} \geq \|Du_n\|_{L^p(\Omega)}$. Por lo tanto $\{u_n\}$ es acotada en

$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$. Entonces existe $\{u_{n_j}\}$ subsucesión de $\{u_n\}$ tal que $u_{n_j} \longrightarrow u$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y $u_{n_j} \longrightarrow u$ en $L^p(\Omega)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \|u\|_{L^p(\Omega)} = 1 \\ \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \underline{\underline{0}} \quad \|u_{n_j}\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|Du\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 0 \Rightarrow u \equiv c$$

Pero $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Rightarrow u \equiv 0$ en $\partial\Omega$

$\Rightarrow c = 0$ Absurdo por $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$ //

2.- La primera parte es trivial

Supongamos que $\Omega = B(x, r)$

$x = 0$, $r = 1 \longrightarrow \|u - (u)_{B(0,1)}\|_{L^p(B(0,1))} \leq C \|Du\|_{L^p(0,1)}$

por la 1era parte de 2

$x \neq 0$, $r \neq 1 \longrightarrow v(y) = u(x + ry) \in W^{1,p}(B(0,1))$

$\longrightarrow \|v - (v)_{B(0,1)}\|_{L^p(B(0,1))} \leq C \|Dv\|_{L^p(B(0,1))}$ (I)

$$(v)_{B(0,1)} = \frac{1}{|B(0,1)|} \int_{B(0,1)} u(\underbrace{x+ry}_{z})\,dy$$

$$= \frac{1}{|B(0,1)|} \int_{B(x,r)} u(z)\,\frac{dz}{r^N}$$

$$\shortparallel$$

$$= \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u(z)\,dz$$

$$= (u)_{B(x,r)}$$

$$\Rightarrow \| v - (v)_{B(0,1)} \|^p_{L^p(B(0,1))} = \int_{B(0,1)} |u(\overbrace{x+ry}^{z}) - (v)_{B(0,1)}|^p\,dy$$

II

$$= \frac{1}{r^N} \int_{B(x,r)} |u(z) - (u)_{B(x,r)}|^p\,dy$$

$$= \frac{1}{r^N} \| u - (u)_{B(x,r)} \|^p_{L^p(B(x,r))}$$

$$\| Dv \|^p_{L^p(B(0,1))} = r^p \int_{B(0,1)} |Du(\overbrace{x+ry}^{z})|^p\,dy$$

III

$$= r^{p-N} \int_{B(x,r)} |Du(z)|^p\,dy$$

Juntando I - II y III tenemos el resultado. $\blacksquare$

# Problema de Dirichlet homogéneo

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado con $\partial\Omega \in C^1$

Buscamos $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ que resuelva

$$(PDh) \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Si $u$ es una solución clásica del $(PDh)$ entonces

$$\int_\Omega (-\Delta u + u)\varphi = \int_\Omega f \varphi \, dx$$

$$\|$$

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + u\varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

<u>Def</u> Dada $f \in L^2(\Omega)$. Decimos que $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil de $(PDh)$ si

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi + u\varphi)\, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

¿Existe solución? ¿Unicidad?

• <u>Unicidad</u> Si $u$, $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ son dos soluciones débiles (PDh) entonces $w = u - \tilde{u}$ es una solución débil de

$$\begin{cases} -\Delta w + w = 0 & \text{en } \Omega \\ w = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Entonces

$$\int_\Omega Dw\, D\varphi + w\varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

En particular

$$\int |Dw|^2 + w^2 \, dx = 0 \Rightarrow w = 0 \text{ a.e. en } \Omega$$

<u>Existencia</u>

$u$ es sol de (PDh) si y solo si

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega (|Dv|^2 + |v|^2)\, dx - \int_\Omega f v \, dx \right\} \quad (*)$$

$$= \frac{1}{2} \int_\Omega (|Du|^2 + |u|^2)\, dx - \int_\Omega f u \, dx$$

Veamos que $\exists\, u \in H_0^1(\Omega)$ tal que tenemos $(*)$

Sea $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\frac{1}{2}\underbrace{\int_\Omega (|Dv|^2+|v|^2)\,dx}_{\|v\|_{H_0^1(\Omega)}} - \int_\Omega fv\,dx \geq \frac{1}{2}\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$\geq \frac{1}{2}\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$\geq -\frac{1}{2}\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\Rightarrow I = \inf_{v\in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2}\int_\Omega (|Dv|^2+v^2)\,dx - \int_\Omega fv\,dx \right\} \text{ es finito}$$

Sea $\{u_n\}$ ~~[illegible]~~ $\subseteq H_0^1(\Omega)$ una suc minimizante

es decir

$$\frac{1}{2}\|u_n\|^2_{H_0^1} - \int_\Omega f u_n\,dx \longrightarrow I$$

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

Dado $\varepsilon > 0$ $\exists n_0$ tq

$$I - \varepsilon > \frac{1}{2}\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega f u_n\,dx \quad \forall n \geq n_0$$

Entonces podemos suponer que $\{u_n\}$ es acotada a $H_0^1(\Omega)$. Entonces existe una subsucesion $\{u_{n_j}\}$ de $u$ tq

$$u_{n_j} \longrightarrow u \text{ en } ~~[illegible]~~\ H_0^1(\Omega)$$

$$u_n \longrightarrow u \text{ en } L^2(\Omega)$$

$$\Rightarrow \int u_{n_j} f\,dx \longrightarrow \int fu\,dx \text{ y } \underline{\lim} \|u_{n_j}\|_{H_0^1(\Omega)} \geq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$\Rightarrow I = \cancel{\quad} \frac{1}{2} \|\nabla u_j\|_{H_0^1(\Omega)} - \int f u_j \, dx$

$\geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{H_0^1(\Omega)} - \int f u \, dx \geq I$ ✓

<u>Nuevo</u> <u>problema</u>: Cual es la regularidad de u