Téor de representación de Riesz-Fréchet

Sea H un espacio de Hilbert. Dado $\varphi \in H'$ $\exists! f \in H$ tq

$$\varphi(v) = (f, v) \quad \forall v \in H$$

↳ producto interno de H

Además se verifica

$$\|f\|_H = \|\varphi\|_{H'}$$

D/ Sea $\varphi \in H'$

$\longrightarrow M = \varphi^{-1}(0)$ subespacio cerrado de H

Si $M = H \Rightarrow f = 0$ ✓

Si $M \neq H$

Af. $\exists g \in H$ tq $g \notin M$ $\|g\|_H = 1$

$(g, w) = 0 \quad \forall w \in M$

En efecto sea $g_0 \in H$ tq $g_0 \notin M$

y $g_1 = P_M g_0$

Af Dado $v \in H$ $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ y $w \in M$ tq

$$v = \lambda g + w$$

Si tomamos $\lambda = \dfrac{\varphi(v)}{\varphi(g)}$ entonces

$$\varphi(v - \lambda g) = 0 \Rightarrow v - \lambda g = w \in M$$

$$\left.\begin{array}{l} \therefore \varphi(v) = \lambda \varphi(g) \\ \langle v, \varphi(g) g \rangle = \lambda \varphi(g) \underbrace{(g, g)}_{=1} \end{array}\right\} = \checkmark$$

Unicidad: tarea

Teor de Stampacchia y Lax-Milgram

Def Se dice que una forma bilineal $a : H \times H \to \mathbb{R}$ es

(i) Continua: si $\exists C > 0$ tq $|a(u,v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_H$ para todo $u, v \in H$

(ii) Coerciva: Si existe una constante $\alpha > 0$ tq $a(u,v) \geq \alpha |v|^2$ $\forall v \in H$

Teor de Stampacchia

Sean $a: H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal, continua y coercivo y $K \subset H$ un convexo cerrado y no vacío. Dado $\varphi \in H'$ $\exists! \, u \in K$ t.q

① $a(u, v-u) \geq \varphi(v-u) \quad \forall v \in K$

Además, si a es simétrica, entonces u se caracteriza como

$$\begin{cases} u \in K \\ \frac{1}{2} a(u,u) - \varphi(u) = \min\limits_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2} a(v,v) - \varphi(v) \right\} \end{cases}$$

D/ Según el teor de representación de Riesz-Fréchet, $\exists! \, f \in H$ t.q $\varphi(v) = (f, v)$

Por otro lado fijado $u \in H$, $a(u, \cdot) \in H'$

$\Longrightarrow \exists \, Au \in H$ t.q $a(u,v) = (Au, v) \quad \forall v \in H$

Teor de Riez Frechet

Tarea $A: H \to H$ es lineal

$\|Au\|_H \leq C \|u\| \, \forall u \in H$

y $(Au, u) \geq \alpha \|u\|^2_H \quad \forall u \in H$

Luego ① se puede reescribir de la sgte forma: Buscamo $u \in K$ tq

$$(Au, v-u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in K$$

Sea $\rho > 0$ (lo fijamos más tarde)

$$(\rho f - Au, v-u) \leq 0$$

$$\|$$

$$(\underline{\rho f - Au + u} - u, v-u) \leq 0 \quad \forall v \in K$$

$$\Longrightarrow \quad u = P_K(\rho f - \rho Au + u)$$

Def $S : K \longrightarrow K$

$$Sv = P_K(\rho f - \rho Au + v)$$

Para resolver el problema necesito encontrar un punto fijo de S

Af $\exists \rho > 0$ p/el cual S es una contracción

es decir $\exists \lambda \in (0,1)$ tq

$$\|Sv_1 - Sv_2\|_H \leq \lambda \|v_1 - v_2\| \quad \forall v_1, v_2 \in K$$

$\|Sv_1 - Sv_2\|_H \leq \|(v_1 - v_2) - \rho(Av_1 - Av_2)\|_H$

"Porque es una proyeccion"

$\Rightarrow \|Sv_1 - Sv_2\|_H^2 \leq \|v_1 - v_2\|_H^2 - 2\rho(v_1 - v_2, A(v_1 - v_2)) + \rho^2\|A(v_1 - v_2)\|^2$

$\leq \|v_1 - v_2\|_2^2 \underbrace{(1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2)}_{1^2}$

"Coercividad" continuidad

Tomo ρ p/q $1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2 < 1$

$\hookrightarrow 0 < \rho < \frac{2\alpha}{C^2}$

Por el teor de punto fijo $\exists!\, u \in K$ tq $u = Su$

Si a es simetrica $\Rightarrow$ a define un nuevo producto interno en H cuya norma asociada es $a(u,u)^{1/2}$ es eq a $\| \ \|_H$

$\therefore$ H es un Hilbert p/este producto interno

Dado $\varphi \in H'$ Por el teor de Riesz Frechet $\exists!\, g \in H$ tq $\varphi(v) = a(g, v)$ $\forall v \in H$

Entonces (1) Se escribe $a(g - u, v - u) \leq 0$ $\forall v \in K$

es decir $u = P_K g$
$\hookrightarrow$ Ahora con el pi dado por a

Es equivalente a encontrar

$$\underset{v \in K}{\arg\min}\ a(g-v, g-v)^{1/2} \quad (*)$$

Por otro lado

$$a(g-v, g-v) = a(g,g) - \underbrace{2a(g,v)}_{\varphi(v)} + a(v,v)$$

$$= a(g,g) + 2\left(\frac{1}{2} a(v,v) - \varphi(v)\right)$$

Entonces $(*)$ es equivalente

$$\underset{v \in K}{\arg\min}\ \frac{1}{2} a(v,v) - \varphi(v)$$

<u>Cor</u> (Lax-Milgram) Sea $a: H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal, cont y coerciva. Entonces p/todo $\varphi \in H'$ $\exists!\, u \in H$ tq

$$\varphi(v) = a(u,v) \quad \forall v \in H$$

Además si a es simetrica entonces u se caracteriza por la propiedad $u \in H$ y $\frac{1}{2} a(u,v) - \varphi(u) = \min_{v \in H} \left(\frac{1}{2} a(v,v) - \varphi(v)\right)$

Problema de Dirichlet homogéneo

$$(PDH)\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

u es solución débil del (PDH) si $u \in H_0^1(\Omega)$ y verifica

$$\underbrace{\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega u v}_{a(u,v)} = \int f v \quad \left(f \in L^{q'} \quad 1 \leq q \leq 2^* \right)$$

Por el teor de Lax-Milgram $\exists!\, u \in H_0^1(\Omega)$ tq

$$a(u,v) = \int f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Problema de Dirichlet no homogéneo

$$(PDNH)\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \Gamma \end{cases} \quad \left(f \in L^{p'} \quad 1 \leq p \leq 2^* \right)$$

- Se supone que existe una función $\bar{g} \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tq $\bar{g} = g$ en Γ
- $K = \{ v \in H^1(\Omega) : v - \bar{g} \in H_0^1(\Omega) \}$

- K es independiente de la elección de $\bar{g}$
- K es un convexo, cerrado y no vacío

u es solución débil de (PDNH) si $u \in K$ que verifica

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

<u>Proposición</u> Para todo $f \in L^{p'}$ $\exists! \, u \in K$ solución débil del (PDNH). Además u viene dada por

$$\min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 + v^2 - \int_\Omega f v \right\}$$

D/ 1º $u \in K$ es sol débil del (PDNH) si y solo si

$$\int_\Omega \nabla u (\nabla v - \nabla u) + \int_\Omega u(v-u) \geq \int_\Omega f(v-u) \quad \forall v \in K$$

$\boxed{\Rightarrow}$ ✓

$\boxed{\Leftarrow}$ ~~[illegible]~~ Para todo $w \in H_0^1(\Omega)$ y se toma $v = u \pm w \in K$

Entonces

$$\pm\int_{\Omega} \nabla u \nabla w \pm \int_{\Omega} u w \geq \pm \int f w \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Longrightarrow \int_{\Omega} \nabla u \nabla w + \int_{\Omega} u w = \int f w \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

$\Longrightarrow \hat{u}$ es solución débil de (PDNH).

2º tomo $a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla w + \int u v$ y aplico el teorema de Stampacchia.

Ecuación elíptica de segundo orden

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado, $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$ $1 \leq i,j \leq N$ que verifican la condición de eliptidad

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \quad \text{con } \alpha > 0$$

Se da también una función $a_0 \in C(\bar{\Omega})$

Se busca una función $u: \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifique

$$(EEH)\begin{cases} -\sum_{ij=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + a_0 u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \Gamma \end{cases}$$

u es solución de (EEH) si $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifica

$$\int_\Omega \sum_{ij=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x) + \int_\Omega a_0(x) u v = \int_\Omega f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Si $a_0(x) \geq 0$ en Ω entonces para todo $f \in L^{p'}(\Omega)$ (con $1 \leq p < 2^*$) existe una única solución débil. Tomas

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{ij} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x) + \int_\Omega a_0 u v$$

y aplicas el teor de Lax-Milgram

Si además (a_{ij}) es simétrica $\Rightarrow$ $a(\,,\,)$ es simétrica. Por lo tanto u viene dado

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{ij=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + a_0 v^2 - \int_\Omega f v \right\}$$

Consideremo un problema más general

$$(EEG)\begin{cases} -\sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f & \text{en } \Lambda \\ u = 0 & \text{en } \Gamma \end{cases}$$

donde $a_i \in C(\bar{\Lambda})$

Una solucion debil de (EEG) es una función de $u \in H_0^1(\Lambda)$ tq

$$\underbrace{\int_\Lambda \sum a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \int_\Lambda \sum a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + \int a_0 u v}_{a(u,v)} = \int_\Lambda f v \quad \forall v \in H_0^1(\Lambda)$$

$a(u,v)$
forma bilineal.
En general no es simetrica
(ojo caso $N=1$)
ver el Brezis

Entonces tenemos que usar Lax-Milgram para probar la existencia y la unicidad

---

Pensar en el caso no homogeneo

Problema de Neumann

$$(PNH)\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{en } \Gamma \end{cases}$$

Una solución débil de (PNH) es una función $u \in H^1(\Omega)$ si

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int uv = \int fv \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Para todo $f \in L^{q'}(\Omega)$ (con $1 \leq q \leq 2^*$) existe una única $u \in H^1(\Omega)$ solución débil de (PNH). Además u viene dada por

$$\min_{v \in H^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int |\nabla v|^2 + v^2 - \int_\Omega fv \right\}$$