Teoría Electromagnética
Curso 2024

Práctico 1
Herramientas matemáticas, libertad de calibre y funciones de Green

Delta de Dirac - Distribuciones

1. La función salto unidad en el origen o función de Heaviside $H(x)$ se define como:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

a) Calcule las derivadas como distribuciones de:
i) $[1 - H(x)] \cos(x)$
ii) $[H(x+2) + H(x) - H(x-2)]\, e^{-2x}$
iii) $\tanh(1/x)$

b) Muestre que:
i) $\text{sen}(ax)\delta'(x) = -a\delta(x)$
ii) $\frac{d^2}{dx^2} e^{ik|x|} = 2ik\delta(x) - k^2 e^{ik|x|}$

c) La función de Bessel $J_0(x)$ es solución de

$$xy'' + y' + xy = 0$$

muestre que $H(x)J_0(x)$ también es solución en sentido generalizado.

d) Muestre que:
i) $\delta(\cos(x)) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \delta(x - \pi/2 + n\pi)$
ii) $\delta(\tan(x)) = \delta(x), \quad -\pi/2 < x < \pi/2$
iii) $\delta(x^3 + 3x) = \frac{1}{3}\delta(x)$

e) Calcule $\int_0^1 e^{2x}\delta(2x-1)dx$

2. Densidades de carga

a) La densidad de carga T_p asociada a un dipolo puntual $\vec{p}$ en $\vec{r} = \vec{r}_0$ se define como

$$T_p = -\vec{p}.\nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_0).$$

Compruebe que al integrar esta distribución contra $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ se obtiene el potencial de un dipolo puntual.

b) Partiendo de la fórmula de cambio de variables, halle las expresiones de $\delta^{(2)}(\vec{r}-\vec{r_0})$ en coordenadas polares y de $\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r_0})$ coordenadas esféricas y cilíndricas.

c) Utilizando las porpiedades de la Delta de Dirac exprese las siguientes distribuciones de carga como densidades volumétricas:

i) Una carga puntual.

ii) Una línea de carga infinita de densidad uniforme λ.

iii) Un anillo cargado de densidad uniforme λ.

iv) Un disco cargado con densidad superficial uniforme σ.

v) Una esfera de densidad superficial uniforme σ.

En todos los casos hágalo en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas, elegidas de manera adecuada.

Libertad de Calibre (*gauge*)

3. a) Suponiendo que los campos $\vec{A}$ y ϕ caen suficientemente rápido a cero en el infinito, demuestre que:

i) La condición de Coulomb $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ fija por completo la libertad de calibre del electromagnetismo (es decir los campos $\vec{A}$ y ϕ).

ii) Este gauge minimiza $\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{A}|^2 dV$.

b) Demuestre que la condición de Lorentz, definida por $\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ no fija por completo la libertad de calibre (en ese caso decimos que es incompleto). ¿Qué otra condición deberá agregarse para eliminar esta libertad?

c) Muestre que el calibre temporal, definido por $\phi = 0$, es incompleto.

4. a) Halle los campos y las distribuciones de carga y corriente correspondientes a:

$$\Phi(\vec{r},t) = 0 \qquad \vec{A}(\vec{r},t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qt}{r^2}\hat{e}_r$$

b) Use la función $\Lambda = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qt}{r}$ para transformar los potenciales de a) y comente el resultado.

Función de Green en una y dos dimensiones

5. Considere la función de dos variables

$$G(x,y) = \begin{cases} x(1-y/L) & \text{si } x < y \\ y(1-x/L) & \text{si } x > y \end{cases}$$

a) Muestre que G es la función de Green que cumple la ecuación $\dfrac{d^2}{dy^2}G(x,y) = -\delta(x-y)$ en $(0,L)$ con condiciones de borde nulas.

b) Escriba explícitamente la expresión integral para la solución de la ecuación de Poisson

$$\frac{d^2}{dx^2}\Phi(x) = -\lambda(x)$$

en $(0,L)$ usando la función de Green G. ¿Cuáles son las condiciones de borde necesarias para fijar esta solución?

c) Mediante un desarrollo de Fourier obtenga una expresión para $G(x,y)$ como serie infinita.

6. Determine la función de Green para condiciones de contorno de Dirichlet en dos dimensiones y escriba la solución formal de un potencial arbitrario dado en el borde para:

a) un semiplano,

b) el exterior de un círculo.

Sugerencia: considere el método de las imágenes para el problema electrostático de líneas de carga infinitas.