Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Cálculo III
Curso 2024

PRÁCTICO 2

Teoremas de la función inversa y de la función implícita

1. Mostrar que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big) = (x-2y, 2x-y)$ es globalmente invertible, y encontrar su inversa. Encontrar la región del plano xy que es transformado en el triángulo de vértices $(0,0)$, $(2,1)$ y $(-1,2)$ del plano uv.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big) = (x-y, xy)$.

   a) Dibujar algunas de las curvas de nivel de las funciones u y v. ¿Cuáles regiones del plano xy se transforman en el rectángulo $[0,1]\times[1,4]$ del plano uv? (hay dos).

   b) Calcular una inversa local de f alrededor del punto $(2,-3)$, y hallar $Df^{-1}_{(5,-6)}$.

   c) Verificar que $Df_{(2,-3)}Df^{-1}_{(5,-6)} = Id$, haciendo la multiplicación matricial respectiva.

3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y,z) = (u,v,w) = (x-xy, xy-xyz, xyz)$. Sea $U := \{(x,y,z) : xy \neq 0\}$. Mostrar que f es un difeomorfismo en U, y dar una fórmula para su inversa $f^{-1} : f(U) \to U$. Hallar el jacobiano de f^{-1} en $(a,b,c) \in f(U)$.

4. Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable e invertible en un entorno del punto a, y que $J_f(a) = 0$. Probar que f^{-1} no es diferenciable en $f(a)$. Dar un ejemplo de esta situación.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = e^x(\cos y, \operatorname{sen} y)$

   a) Mostrar que f no es inyectiva y hallar su imagen.

   b) Mostrar que el jacobiano de f es distinto de 0 para cualquier punto del plano, y concluir que f es un difeomorfismo local, pero no es un difeomorfismo.

   c) Sean $a = (0, \pi/3)$, $b = f(a)$. Llamamos g a la inversa local de f definida en un entorno del punto b, tal que $g(b) = a$. Hallar la fórmula específica de g. Hallar Df_a y Dg_b.

   d) Hallar las imágenes de f de las líneas paralelas a los ejes coordenados.

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (x/2) + x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   a) Demostrar que Df_0 es inyectivo y por lo tanto invertible.

   b) Probar que f no tiene inversa en ningún entorno del 0.

   c) ¿Por qué lo anterior no contradice al teorema de la función inversa?

7. Averiguar si la ecuación $(x+1)^2y - xy^2 = 4$ define a y como función de x en un entorno de los siguientes puntos:

a) (1,2); b) (2,1); c) (-1,2).

8. En los siguientes casos mostrar que la ecuación $F(x,y) = 0$ define implícitamente a y como función de x en el punto dado (a,b), y calcular $f'(a)$.

   a) $F(x,y) = xe^y - y + 1$ en $(-1,0)$. b) $F(x,y) = x\cos(xy)$ en $(1,\pi/2)$.

9. Demostrar que la ecuación $e^y + y = e^{-2x} - x$ determina una única función $y = f(x)$ definida para todo x real. Hallar $f'(0)$, $f''(0)$ y $f'''(0)$.

10. Mostrar que la ecuación $F(x,y,z) = 0$ define implícitamente a z como función de x e y, $z = f(x,y)$, en el punto dado (a,b,c). Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

    a) $F(x,y,z) = z^3 - z - xy\operatorname{sen} z$ en $(0,0,0)$. b) $F(x,y,z) = x + y + z - e^{xyz}$ en $(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

11. Mostrar que el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{rcl} 3x + y - z - u^3 & = & 0 \\ x - y + 2z + u & = & 0 \\ 2x + 2y - 3z + 2u & = & 0 \end{array}\right.$
    puede resolverse para x, y, u en términos de z; para x, z, u en términos de y; y para y, z, u en términos de x. Mostrar que, en cambio, no puede resolverse para x, y, z en términos de u.

12. Mostrar que las ecuaciones
    $$\left\{\begin{array}{l} 2e^u + vx - 4y + 3 = 0 \\ v\cos u - 6u + 2x - z = 0 \end{array}\right.$$
    definen a u y v como funciones de (x,y,z) en un entorno de $(3,2,7)$, con $u(3,2,7) = 0$ y $v(3,2,7) = 1$. Calcular las derivadas parciales de u y v respecto a x, y, y z en $(3,2,7)$.

13. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $m < n$ una función de clase C^1. Probar que f no es inyectiva (sugerencia: hacer inducción en m).