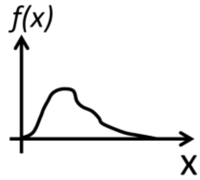
Práctico 2

1. Asuma que inicialmente a la cuerda se la da la forma *f*(*x*) como se indica en la figura. ¿Es razonable suponer que a tiempos posteriores el movimiento vertical de la cuerda estará dado por la solución de D'Alembert? Justifique su respuesta



2. (a) Obtener la ecuación de movimiento en una cuerda de densidad lineal uniforme ρ sujeta a una tensión constante $\vec{T}$. (b) Suponer desplazamientos de pequeña amplitud y obtener la ecuación de ondas linealizada.

3. Suponga una cuerda infinita con densidad lineal uniforme pero sujeta a una tensión que depende de la posición $\vec{T}(x)$. Obtener la ecuación de ondas suponiendo pequeños desplazamientos.

4. Una cuerda de longitud L está fija en ambos extremos. En $t = 0$ se separa transversalmente distancia h ($h << L$) en el punto $x = \frac{L}{2}$ formando un triángulo. Luego de soltarse halle el movimiento resultante de la cuerda dado por $y(x,t)$. ¿Qué modos se excitan con esta configuración?

5. A una cuerda de longitud infinita se le obliga a tomar una forma armónica $y = Acos(kx)$, y se suelta en el instante $t = 0$ a partir del reposo. (a) Demuestre que si T es la tensión y ρ la densidad lineal de masa de la cuerda, su forma para cualquier tiempo subsiguiente es $y = Acos(kx)\cos(kct)$, donde $c^2 = \frac{T}{\rho}$. (b) Hallar las energías medias cinéticas y potencial por unidad de longitud de la cuerda en un instante arbitrario t.

6. Una cuerda se encuentra sobre el eje x. En $t = 0$ se le impone a la parte comprendida entre $x = \pm a$ una velocidad transversal $a^2 - x^2$. Si la velocidad de la onda en la cuerda es c: (a) Describa el movimiento de la cuerda suponiéndola infinita. (b) Repita el cálculo anterior, pero suponiendo ahora que la cuerda tiene longitud $2a$ y está fija en los puntos $\pm a$.

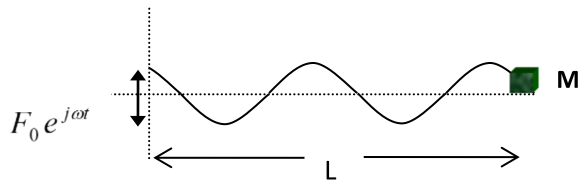
7. Considere dos cuerdas unidas en $x = 0$ que se extienden hacia $\pm\infty$. (a) Se envía una onda incidente de forma determinada por $g_I(x - c_1 t)$ por la cuerda 1 desde las x negativas, lo que genera una onda reflejada $h_R(x + c_1 t)$ y una transmitida $g_T(x - c_2 t)$. Imponiendo las condiciones de borde adecuadas halle h_R y g_T. (b) En el caso de una onda armónica con frecuencia ω que llega desde las x negativas a través de la cuerda 1. Halle los coeficientes de reflexión y de transmisión si las densidades de las cuerdas 1 y 2 son $\rho_1 = 25\frac{gr}{cm}$ y $\rho_2 = 9\frac{gr}{cm}$ respectivamente.

8. Dos cuerdas homogéneas de igual longitud L y de densidades lineales de masa ρ_1 y ρ_2 se unen en un punto y se fijan en sus extremos. Si la tensión es T, encuentre las frecuencias de los modos normales de vibración.

9. Considere una cuerda infinita con una masa M enhebrada en el origen. Una onda armónica incide sobre la masa desde $x < 0$. (a) Escriba las condiciones de frontera en el origen. (b) Halle los coeficientes de transmisión y reflexión. ¿Existe una diferencia de fases entre la onda incidente y las ondas transmitida y reflejada? (c) Considere ahora que la cuerda es de longitud $2L$ con sus extremos fijos, densidad lineal de masa ρ y está sometida a una tensión constante T. En el punto medio sigue la masa M enhebrada. Especifique las condiciones de frontera apropiadas y encuentre, geométricamente, las frecuencias naturales de este sistema.

10. Considere una cuerda de Longitud L fija en $x = 0$. Deduzca y justifique las condiciones de frontera para las siguientes situaciones del otro extremo y halle los modos normales: (a) Extremo libre. (b) Extremo fijo. (c) Extremo sujeto a una masa M.

11. Considere una cuerda homogénea de masa m_c, longitud L (densidad de masa ρ) y tensión T. En su extremo derecho se encuentra sujeta una masa M. La cuerda vibra en estado estacionario sometida a una fuerza impulsora, de amplitud F_0 y frecuencia ω, que actúa en su extremo izquierdo. (a) Halle la forma de la onda en un instante arbitrario. (b) Halle las frecuencias de resonancia del sistema. (c) Halle la ecuación de los nodos, plantee una solución gráfica. (d) Analice los casos extremos en que $M \ll m_c$ y $M \gg m_c$.

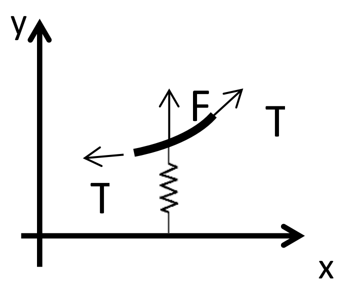


12. Suponga que una cuerda está inmersa en un medio viscoso que le ejerce una fuerza proporcional a su velocidad transversal:

$$\Delta F_{arrastre} = -\gamma \frac{\partial y}{\partial t} \Delta x$$

(a) Derive la ecuación de onda modificada para la cuerda. (b) Si para $x < 0$ la cuerda no tiene un término viscoso y para $x > 0$ sí. Halle la solución $y(x,t)$ para $x > 0$ cuando una onda armónica se propaga desde la región de las x negativas hacia las positivas. Busque soluciones del estilo $y(x,t) = e^{i\omega t} F(x)$. (c) Muestre que la onda está atenuada, es decir, que su amplitud decrece con x. (d) Halle la distancia característica de atenuación, definida como la longitud donde la amplitud decae a $\frac{1}{e}$ de su valor original.

13. Una cuerda infinita de densidad lineal de masa ρ, se encuentra sujeta a una tensión T e inmersa en un medio puramente elástico. Dicho medio ejerce sobre la cuerda una fuerza vertical por unidad de longitud de la forma $-\gamma y(x,t)$ donde $y(x,t)$ es el desplazamiento vertical de la cuerda con respecto a su posición de equilibrio y γ una constante real positiva (ver esquema adjunto). (a) Deduzca la ecuación que describe el movimiento vertical de la cuerda. <u>*Nota:*</u> *Asuma pequeñas oscilaciones.* (b) Buscando soluciones de la forma



$y(x,t) = A.e^{i(kx-\omega t)}$ encuentre la relación $k(\omega)$. Discuta qué relaciones deben cumplir ω, γ, T y $c_o = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ para que se cumplan las siguientes condiciones e interprételas físicamente: (i) k es real (ii) k es imaginario puro (iii)$k = 0$.

14. Considere una cuerda de longitud L, densidad ρ y tensión T. Suponga que la cuerda tiene una masa m_1 anudada en el extremo $x = 0$ y una masa m_2 en el extremo $x = L$.
(a) Mostrar que el vector de onda K de los modos normales cumple la relación:

$$tg(x) = \frac{(m_1 + m_2)LTc^2x}{m_1 m_2 c^4 x^2 - L^2T^2} \quad \text{con } x = KL$$

(b) Discuta las situaciones

i. $m_1 \to \infty$ y $m_2 \to \infty$
ii. $m_1 \to 0$ y $m_2 \to 0$
iii. $m_1 \to \infty$ y $m_2 \to 0$

15. Suponga una cuerda de longitud L y densidad lineal uniforme forzada en $x = 0$ con una fuerza armónica de la forma $F_0 e^{i\omega t}$. En el otro extremo, en $x = L$, la impedancia mecánica es $Z_m = R_m + iX_m$. Hallar el desplazamiento de la cuerda en régimen sinusoidal en función de F_0 y Z_m.

16. Ejercicio numérico
Considere la solución de D'Alambert para la cuerda infinita forzada:

$$y(x,t) = \frac{1}{2}[\phi(x-ct) + \phi(x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\delta)d\delta$$
$$+ \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t'-t)}^{x+c(t'-t)} g(x',t')dx'dt'$$

Integrar esta ecuación suponiendo que $\phi = \psi = 0$ y que $g(x,t)$ se puede escribir como $g(x,t) = m(x)h(t)$ con

$$m(x) = \begin{cases} 1 & si\ |x| < a \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}; \qquad h(t) = \begin{cases} \sin(\omega t) & si\ 0 \le t \le 2T \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Representar gráficamente el resultado como una imagen de la matriz $y(x,t)$.