Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral 1 (Física)
Primer semestre 2024

Ejercicios extra

1. **Diferencia y Suma de ángulos**. Usando *únicamente* los valores de la siguiente tabla,

x	0	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\operatorname{sen}(x)$	0	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos(x)$	1	$1/2$	0	-1

hallar el valor de las siguientes expresiones:

$$\operatorname{sen}(\pi/4), \quad \sin(\pi/6), \quad \cos(\pi/4), \quad \cos(\pi/6), \quad \sin(3\pi/4), \quad \tan(\pi/8). \tag{1}$$

Sugerencia: recuerde las fórmulas para $\sin(\alpha \pm \beta)$ y $\cos(\alpha \pm \beta)$.

2. **Función valor absoluto**. La función definida como $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0, \end{cases} \tag{2}$$

es conocida como *valor absoluto*. Es la función que representa la distancia de un número al cero. Graficar, hallar la imagen y determinar si es continua en 0. ¿Es el valor absoluto una función par?

3. Probar las siguientes propiedades:

   a) $|x + y| < |x| + |y|$.
   b) $|\lambda x| = |\lambda||x|$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.
   c) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

4. **Función de Heavisde**. La función definida como $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases} \tag{3}$$

es conocida como *función escalón de Heaviside*. Graficar, hallar la imagen, y hallar los límites

$$\lim_{x\to+\infty} H(x), \quad \lim_{x\to-\infty} H(x), \quad \lim_{x\to 0^+} H(x), \quad \lim_{x\to 0^-} H(x) \tag{4}$$

5. Probar que $(H \circ H)(x) = H(x)$.

6. Calcular los siguientes límites o demostrar que no existen:

$$a)\ \lim_{x\to 3} H\left(\sin(x-3)\right), \quad b)\ \lim_{x\to 1} H\left(\frac{x^3-1}{3x-3}\right), \quad c)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{H(\sin^2(x))}{x}, \quad d)\ \lim_{x\to 2} H\left(\frac{H(x^2-2x)}{H((x-2)^2)}\right). \tag{5}$$

7. Para cada caso, hallar el dominio de máxima definición, graficar, hallar imagen y calcular los límites en $\pm\infty$.

    a) $f(x) = |\operatorname{sen}(x)|$.
    b) $f(x) = |\cos(x)|$.
    c) $f(x) = \sqrt{|x|}$.
    d) $f(x) = |x^2 - 2x|$.
    e) $f(x) = \sqrt{\ln(|x|)}$.
    f) $f(x) = \left|\frac{x-1}{x+3}\right|$.
    g) $f(x) = \left|\frac{x^2-9}{x+3}\right|$.

8. Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se definen la parte *positiva*, f^+, y *negativa*, f^-, de la función f como sigue:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}, \quad f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \geq 0 \\ f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}. \tag{6}$$

    Probar que $f = f^+ + f^-$.

9. Hallar las partes positivas (y graficarlas) de las siguientes funciones.

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \tag{7}$$

10. Consideremos un objeto de masa $m = 1,0Kg$, sobre una superficie horizontal. La superficie tiene coeficiente de fricción cinético $\mu_c = 0,5$ y coeficiente de fricción estático $\mu_e = 1$. Se le aplica una fuerza F lateralmente. Graficar la fuerza de rozamiento f_{roz} en función de F, y probar que es discontinua en $F = 1$. Discutir una posible explicación física para la desigualdad

$$\lim_{F\to 1^-} f_{roz}(F) > \lim_{F\to 1^+} f_{roz}(F) \tag{8}$$