Práctico 3: Cálculo de variaciones, vínculos no holónomos

1. (*) Encuentre la curva que une dos puntos fijos a lo largo de la cuál una párticula (masa m), que parte del reposo, llega al punto inferior en el menor tiempo posible bajo la acción de la gravedad.

2. (*) Al hallar una función que extremase la integral $\int f dx$ se supuso que f era función solo de x, de $y(x)$ y de la derivada primera de y con respecto a x, $\dot{y}(x)$. Pruebe que si f depende también de $\ddot{y}$, y en los extremos no varian ni y ni $\dot{y}$ la ecuación correspondiente de Euler-Lagrange es

$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial \ddot{y}} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

   Generalice para dependencia en derivadas de orden superior.

3. Cuando chocan dos bolas de billar las fuerzas se dice que son impulsivas, y la integral sobre t se llama impulso de la fuerza. Demuestre que si en las ecuaciones de Lagrange hay presentes fuerzas impulsivas aquellas se pueden transformar en:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)_f - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)_i = s_j$$

   donde los subíndices i y f corresponden a los estados del sistema antes y después del impulso, s_j es la fuerza impulsiva generalizada correspondiente a q_j, y L es la Lagrangiana, en la que se incluyen todas las fuerzas no impulsivas.

4. El oscilador armónico unidimensional tiene el Lagrangiano dado por

$$L = m\dot{x}^2/2 - kx^2/2.$$

   Suponga que no conoce la solución del movimiento pero sabe que el movimiento debe ser periódico y por lo tanto puede ser descrito por una serie de Fourier de la forma

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j cos(j\omega t)$$

   (tomando $t = 0$ en el punto de retroceso) donde ω es una incógnita. La representación para $x(t)$ define un camino dependiente de muchos parametros en el espacio de configuraciones. Considere la acción como la integral I entre dos tiempos t_1 y t_2 separados por un período $T = 2\pi/\omega$. Muestre que I es un extremo (para $x(t)$ no idénticamente nulo) solo si $a_j = 0$ para $j \neq 1$ y solo si $\omega = k/m$.

5. Considere una partícula que se mueve en el espacio sometida a los vínculos entre sus coordenadas cartesianas (x, y, z) dados por

$$(1) \quad \omega^1 = (x^2 + y^2)dx + xzdz = 0, \qquad (2) \quad \omega^2 = (x^2 + y^2)dy + yzdz = 0$$

a) Pruebe por absurdo que cada vínculo considerado por separado es no-integrable (es decir que no admite la forma fdg para algún par de funciones $f(x, y, z)$ y $g(x, y, z)$).
b) Pruebe exlícitamente que el conjunto de ambos vínculos sí es integrable (es decir que admite la forma $\omega^i = f^i_j dg_j$ para algunas funciones f^i_j y g_j con $i, j = 0, 1$) y que es equivalente al sistema

$$d\ln(y/x) = 0, \qquad xd(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

Pista: pruebe con factores integrantes polinómicos simples.

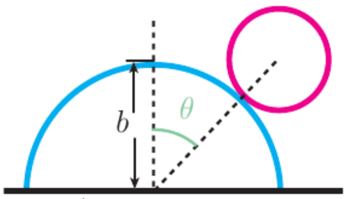
c) Concluya que la partícula está sometida a vínculos holónomos y obtenga explícitamenete las ecuaciones de vínculo integradas.

6. Considere un aro homogéneo de radio R y siempre vertical, que rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal (vínculos no holónomos), halle las ecuaciones de movimiento, resuélvalas y demuestre que el centro de masa se mueve en un círculo. Halle el radio de este movimiento circular y su rapidez en términos de R y las velocidades angulares.

7. Considere una barra homogénea de masa M y longitud H restringida a moverse en un plano vertical. La barra se desliza sin fricción apoyando un extremo en el piso horizontal y el otro en una pared vertical.

   (a) Halle las ecuaciones de Lagrange y obtenga los multiplicadores de Lagrange en función del ángulo θ que forma la barra con la horizontaly su derivada.
   (b) Halle la reacción en la pared.
   (c) Escriba la energía del sistema en función de θ y su derivada.
   (d) Si inicialmente la barra está en reposo y $\theta = \theta_0$, demuestre que la barra se despega de la pared cuando $\sin\theta = \frac{2}{3}\sin\theta_0$.

8. Un aro homogéneo de masa M y radio R restringido a moverse en un plano vertical rueda sin deslizar apoyado sobre un alambre semicircular de radio b como se muestra en la figura.



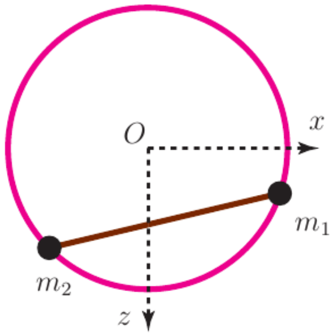
   (a) Escriba los vínculos y encuentre todas las ecuaciones diferenciales que permitan hallar las coordenadas generalizadas y los multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos.
   (b) Halle los multiplicadores de Lagrange en función de θ. Suponga que el aro parte del reposo en $\theta = 0$.
   (c) Halle para qué ángulo θ el aro se desprende del alambre.

9. Considere un aro homogéneo de masa M y radio R restringido a moverse en un plano vertical que rueda sin deslizar por el interior de otro aro vertical fijo y de radio H.

   (a) Utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange halle una ecuación diferencial para el la coordenada angular θ del centro de masas del aro de radio R.

(b) Encuentre el valor máximo que alcanza θ.

10. Dos partículas de igual masa, $m_1 = m_2 = m$, unidas por una barra sin masa de longitud $H = 6D$, obligadas a moverse en un plano vertical $x - z$, están obligadas a moverse sin roce sobre un aro vertical de radio $R = 5D$.



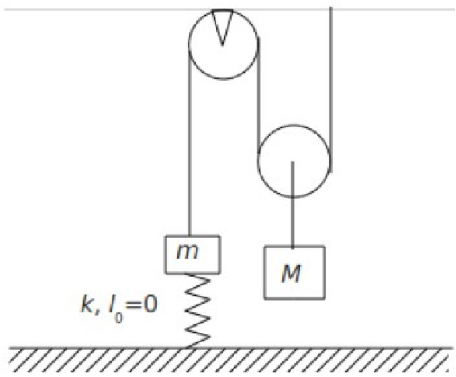
(a) Calcule las fuerzas reactivas, $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$, sobre las partículas y muéstrelas en un dibujo.

(b) Escriba la ecuación diferencial para la coordenada angular θ del centro de la barra.

(c) Suponga que el sistema parte del reposo en $\theta = \pi/2$. Halle $\dot{\theta}^2$ y los multiplicadores de Lagrange en función de θ. Encuentre $|\mathbf{R}_1|$ para $\theta = 0$.

11. Una rueda uniforme rueda sin deslizar sobre una superficie plana que forma un ángulo α con la horizontal. La rueda ha de permanecer en un plano perpendicular al inclinado, pero puede girar alrededor de un eje perpendicular a la superficie. Halle las ecuaciones integradas del movimiento bidimensional de la rueda, utilizando las ecuaciones de Lagrange y el método de los multiplicadores de Lagrange.

12. Considere el sistema de la figura, formado por dos masas M y m, conectadas entre sí y al techo por un hilo inextensible y sin masa (las poleas tampoco tienen masa). La masa m a su vez esta unida a un resorte ideal de constante k y longitud natural nula.



(a) Encuentre y resuelva las ecuaciones de Lagrange del movimiento.

(b) Calcule las tensiones de la cuerda por el metodo de multiplicadores de Lagrange.