Principios variacionales en Física.

Problema — Llegar a facultad en el menor tiempo posible

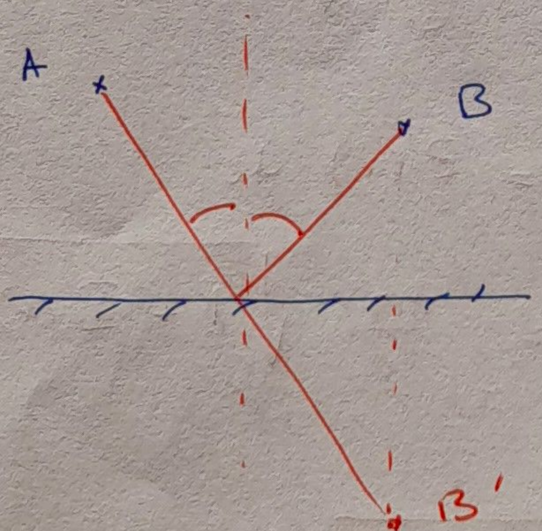
Optimizar una variable sujeta a restricciones

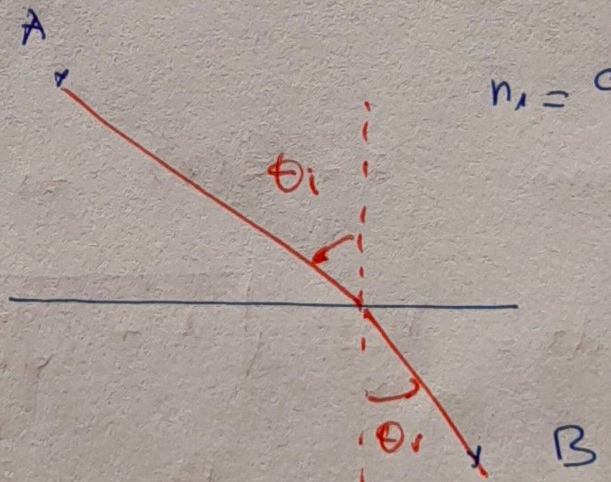
Enfoques complementarios → variacionales / diferenciales

Newton ⟷ Maupertuis
Huygens ⟷ Fermat
Schrodinger ⟷ Feynman

Cálculo variacional — Euler, Lagrange, Hamilton

Principio de Fermat





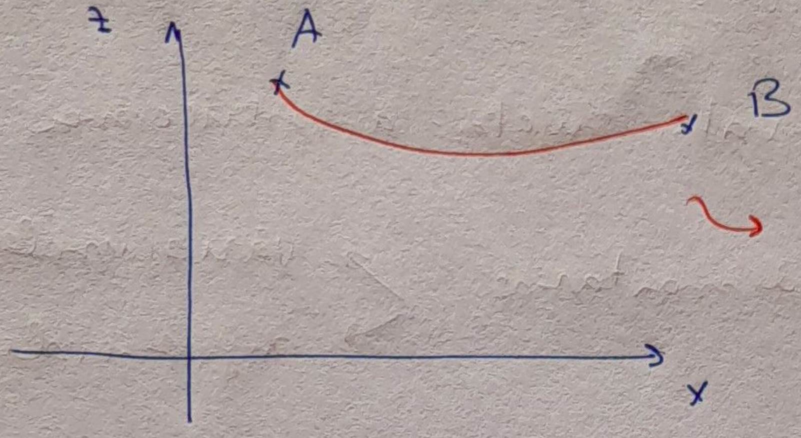
$n_1 = c/v_1$

$n_2 = \frac{c}{v_2}$

$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_r$

"la naturaleza siempre va por las vías más cortas".

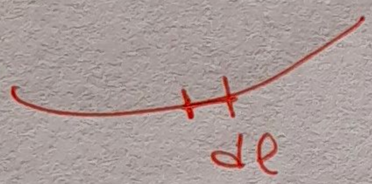
Generalizamos el indice de refracción cambia en forma continua $\Rightarrow$ $n(z)$



$\rightarrow$ curva $Z(x)$

$\downarrow$

queremos encontrar



$$\frac{dl}{dt} = v = \frac{c}{n(z)}$$

$A = (x_0, z_0)$

$B = (x_1, z_1)$

$$dt = \frac{n(z)}{c}\, dl$$

$\downarrow$

$$dt = \frac{n(z)}{c}\sqrt{dx^2 + dz^2}$$

Como $z = Z(x) \Rightarrow dz = Z'(x)\, dx$

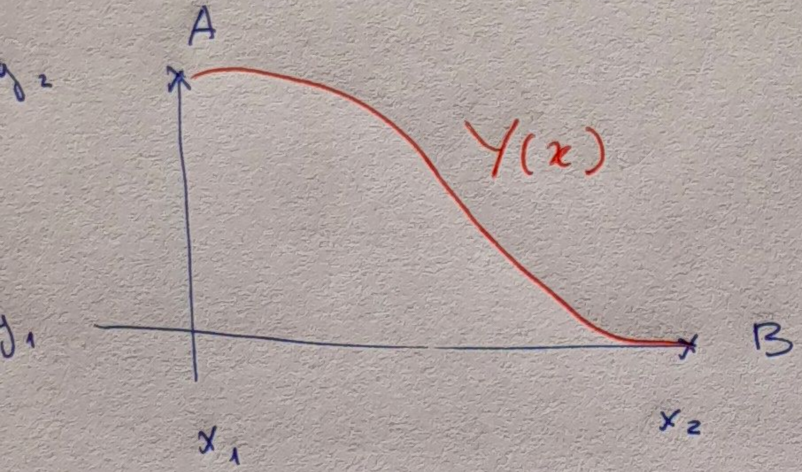
$$dt = \frac{n(z)}{c}\sqrt{1 + \underbrace{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}_{Z'(x)}}\, dx = \frac{n(z)}{c}\sqrt{1 + Z'(x)^2}\, dx$$

$$T = \int_{t_0}^{t_f} dt = \int_A^B \frac{1}{c}\, n(z)\sqrt{1 + Z'(x)^2}\, dx$$ $\rightarrow$ Problema

con $Z(x = x_0) = z_0$

$Z(x = x_1) = z_1$

Braquistócrona



Partícula cayendo bajo la acción de la gravedad demore el menor tiempo posible

Queremos encontrar $Y(x)$

Sabemos $\quad \frac{m}{2} v^2 + m g h = 0 \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow dt = \frac{ds}{v}$$

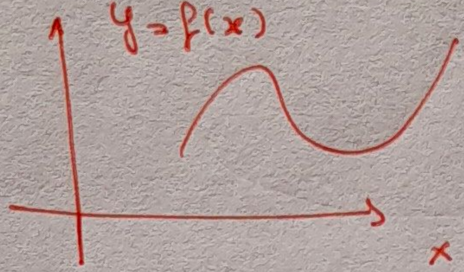
tiempo total $\Rightarrow$ $t = \int_1^2 \frac{ds}{v} = \int_1^2 \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{v}$

pero $ds = dx \sqrt{1 + Y'^2}$

$$t = \int_{x_1}^{x_2} dx \, \frac{\sqrt{1 + Y'^2}}{\sqrt{2gY}}$$

Problema: hallar la función $Y(x)$ para que el tiempo sea mínimo

Volvemos a 6$^{\underline{to}}$. liceo



$\rightarrow$ extremos $\begin{cases} \nearrow \text{máx} \\ \searrow \text{min.} \end{cases}$

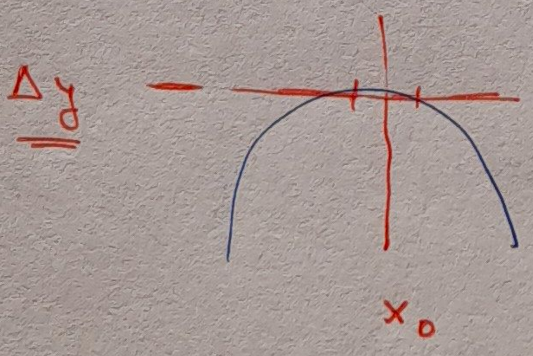
Supongamos que x_0 es un <u>extremo</u>

Si hacemos $x = x_0 + \delta x$

qué pasa con Δy ??

$$\Delta y = f(x + \delta x) - f(x) = f'(x)\,\delta x + \dots$$

pero en los extremos $\Delta y = 0$



Hacer $\Delta y = 0$ equivale a $f'(x_0) = 0$

encontrar x_0

Decimos que f es estacionaria en x_0

porque si cambiamos "poco" $\Rightarrow \Delta f = 0$

$$\Delta y = o(\Delta y^2)$$

Introducción al cálculo variacional

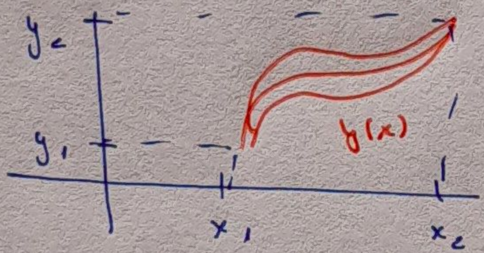
Sea $f(y, y', x)$ con $y = y(x)$ $y'(x) = \frac{dy}{dx}$

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x)\, dx$$

Problema fundamental: Hallar $y(x)$ para que

J sea estacionaria y $y(x_1) = y_1$
$y(x_2) = y_2$

Gráficamente



Estacionaria quiere decir "extremo" si cambiamos "poco" $y \Rightarrow \Delta J = 0$ si consideramos variaciones de primer orden

$$\Delta J = \int_{x_1}^{x_2} dx\, f(y + \Delta y, y' + \Delta y', x) - \int_{x_1}^{x_2} dx\, f(y, y', x)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[f(y + \Delta y, y' + \Delta y', x) - f(y, y', x) \right]$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial f}{\partial y} \delta y - \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right]$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial f}{\partial y}\, \delta y + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'}\, \delta y'} \right]$$

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \; \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'}} \; \underbrace{\delta y'} = \frac{\partial f}{\partial y'}\, \delta y \Big|_{x_2}^{x_2} - \int \delta y \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) dx$$

$$\int u \, dv = u v - \int v \, du$$

$$v = \delta y \Rightarrow dv = \delta y' \, dx$$

$$u = \frac{\partial f}{\partial y'} \Rightarrow du = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) dx$$

$$J = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] \delta y$$

Como $\delta y \Big|_{x_1} = \delta y \Big|_{x_2} = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y'}\, \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} = 0$

Lema fundamental C. V.

Si:
$$\int_{x_1}^{x_2} M(x)\,\eta(x)\,dx = 0$$

para cualquier función arbitraria

$$\Rightarrow \quad M(x) = 0 \qquad \forall x \in [x_1, x_2]$$

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] \delta y = 0$$

para cualquier $\delta y \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0}$$

con $y(x_1) = y_1$
$y(x_2) = y_2$

Distancia + corta entre 2 puntos

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

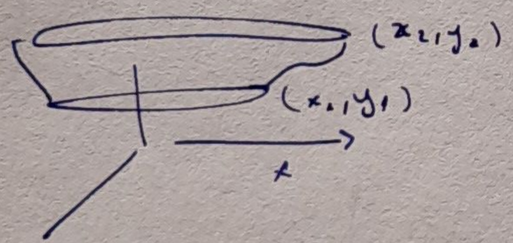
$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

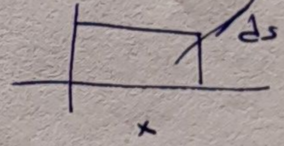
$$f = \sqrt{1 + \dot{y}^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} = cte \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = cte$$

$$\Rightarrow \boxed{y = ax + b}$$

- Mínima superficie de revolución





$$2\pi x\, ds = 2\pi x \sqrt{1+\dot{y}^2}\, dx$$

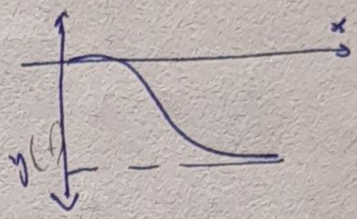
$$f = 2\pi x \sqrt{1+\dot{y}^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} = a$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a^2}{x^2 - a^2}$$

$$x = a \cosh\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

- Curva que une 2 ptos. en un plano vertical tal que una partícula cayendo bajo la acción de la gravedad demora el mínimo tiempo



Queremos hallar $y(x)$

$$t_{12} = \int_1^2 \frac{ds}{v} \qquad ds = \sqrt{1+\dot{y}^2}\,dx$$

$$\frac{m}{2} v^2 + mgh = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh}$$

$$t_{12} = \int_1^2 \underbrace{\frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}}}_{f}\,dx$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} \quad \sqrt{2gy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(1+\dot{y}^2)}{2\left(\frac{1+\dot{y}^2}{2gy}\right)^{1/2}} \left(-\frac{1}{2gy^2}\right)$$

$$x = t - \sin t$$

$$y = \cos t$$

Dos partículas que salen de $\neq$ ptos llegan al mismo tiempo (tautócrona)

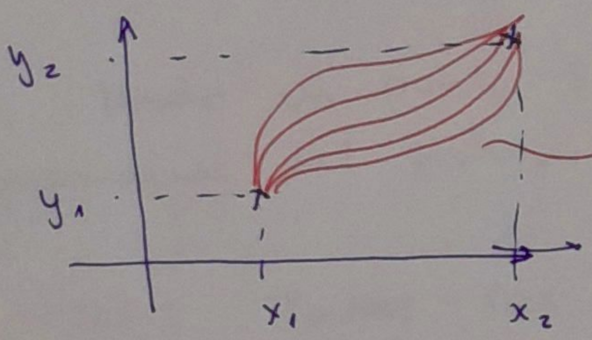
Cálculo variacional

Buscamos una función $y(x)$ que cumpla

$$\underbrace{\delta \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x)\, dx}_{J[y] \rightarrow \text{funcional}} = 0 \qquad \text{sujeto a} \quad \begin{array}{l} y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2 \end{array}$$

decimos que la integral tiene un valor <u>estacionario</u>

o que es un extremo (máximo o mínimo)



dentro de todas las $y(x)$ buscamos una $\tilde{y}(x)$ para q'

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} f(\,)\, dx = 0$$

La solución es

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

$$y(x_1) = y_1$$
$$y(x_2) = y_2$$

Derivada "funcional" $\qquad \dfrac{\delta J[y]}{\delta y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y'}\right)$

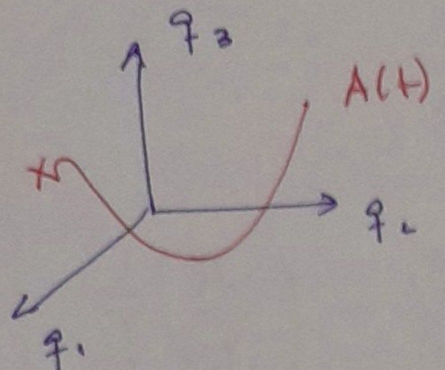
$\downarrow$

en este tipo de variaciones

Principio de Hamilton

Recordamos: Espacio de configuraciones $(q_1, \dots q_n)$

La configuración del sistema queda determinada



* No es el espacio físico usual

* A medida que el sistema se mueve describe una curva

Obs Dado un punto queda determina la configuración del sistema pero no la dinámica

Hipótesis Todas las fuerzas derivan de un potencial generalizado

$$U(q_1, \dots q_n, \dot{q}_1, \dots \dot{q}_n, t)$$

$\downarrow$ notación

$$U(q, \dot{q}, t)$$

P. de Hamilton El mov. del sistema de t_1 a t_2 es tal que

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt$$ tiene un valor estacionario

Si el sistema es holónomo $\boxed{\text{P. de H} \iff \text{Ec. de Lagrange}}$

(no tengo vínculos que dependan de las veloc)

$$\boxed{\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1, \dots n}$$

↳ Es un conjunto de $2n$ E.D.O.

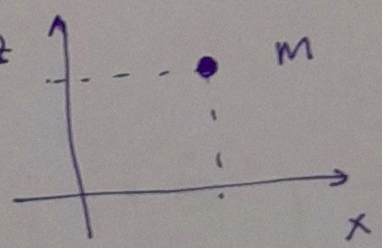
$$q_i(t_1) = q_{1i}$$

$$q_i(t_2) = q_{2i}$$

condiciones "iniciales"

Ejemplo

$V(z)$



$\vec{r} = x\hat{i} + z\hat{k}$

$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{z}\hat{k}$

$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2$

C.G → z, x

$$L = T - U$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - V(z)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \boxed{m\dot{x} = cte}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial z} = -V'(z) \qquad \boxed{m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

Conservación y simetría

Objetivo Encontrar integrales de movimiento

$$E(q,\dot{q},t) = \text{constante}$$

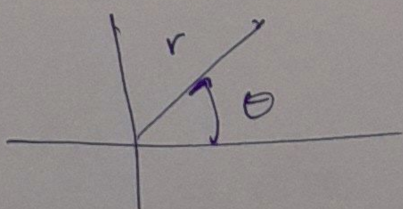
Def Momento generalizado o canónico correspondiente a q_j

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

Ejemplo $$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - V(z)$$

$$p_z = m\dot{z}$$
$$p_x = m\dot{x}$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$



$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \rightarrow \text{momento angular}$$

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - q\phi(r) + \frac{q}{c} A \cdot v \longrightarrow$$ campo EM $\phi, \vec{A}$

con $\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \frac{q}{c} A_x \neq$$ momento mecánico

Coordenada cíclica o ignorable

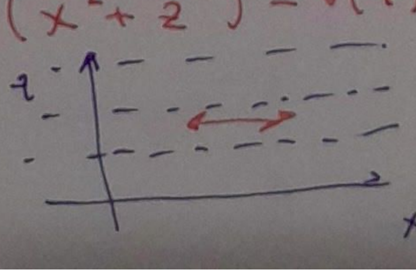
Si $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow$ decimos q_j es cíclica.

Como sabemos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j}}_{= 0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = cte \Rightarrow \underline{P_j = cte}$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - V(z) \Rightarrow$$ x ignorable $P_x = m\dot{x} = 0$



$\rightsquigarrow$ Simetría

* Conservación de la energía

$L(q, \dot{q}, t)$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

$$\frac{dL}{dt} = \underbrace{\sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt}(\dot{q}_i)}_{\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i\right)} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i}\Big) = \frac{\partial L}{\partial t}$$

Si $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow -h(q, \dot{q}, t) = \underline{\underline{cte}}$

¿Será la "energía"?

Resp. $\Rightarrow$ "A veces sí a veces no".

Teor. de Euler de las funciones homogéneas

f es homogénea de grado n

$$\Longleftrightarrow \quad f(\lambda x) = \lambda^n f(x)$$

<u>Ejemplo</u> $\quad f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$

f es homogénea de grado 2

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x,y)$$

Euler dice:

Si f es homogénea de grado n $\qquad \sum_i x_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = n f$

<u>Ejemplo</u>

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x$$

$$x(2x+y) + y(2y+x) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy$$

si $\quad \vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1 \ldots q_n, t)$ $\nearrow$ no aparece "t" escleronomo

$\searrow$ aparece "t" reonomo

$$\vec{v}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2$$

Cuando desarrollo resulta

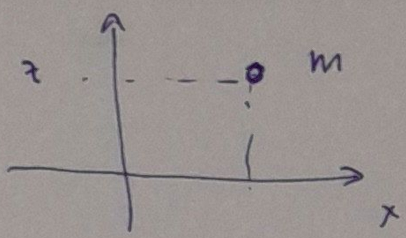
$$T = T_0 + T_1 + T_2$$

$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} \dot{q}_k \dot{q}_j$ homogénea grado 2

$T_1 = \sum_j m'_j \dot{q}_j$ homogénea grado 1

$T_0 =$ no dep. de las $\dot{q}$ ... homogénea grado 0

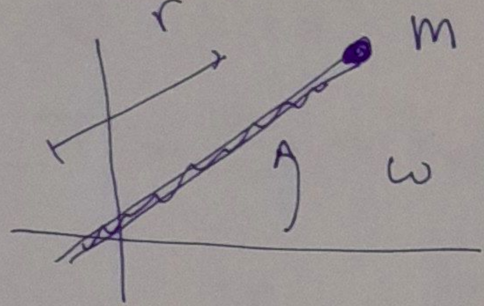
Ejemplo



$\vec{r} = x\hat{i} + z\hat{k}$

Si

$$T = \frac{m}{2}(\dot{z}^2 + \dot{x}^2) \Rightarrow T = T_2$$



1 grado de libertad
(ω no es coordenada)

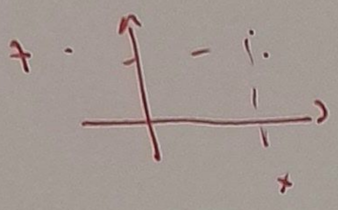
$$\vec{r} = r\cos\omega t\,\hat{i} + r\sin\omega t\,\hat{j}$$

$$T = \frac{m}{2}(\underbrace{\dot{r}^2}_{T_2} + \underbrace{r^2\omega^2}_{T_0})$$

$$T = T_2 + T_0$$

$$(T_1 = 0)$$

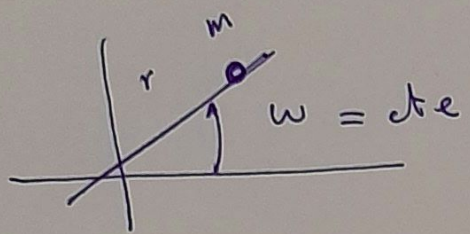
Ejemplo



$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - U(z)$$

$T = T_2$ $\Rightarrow$ $\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + U(z) = cte$

es la energía



$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\omega^2)$$

$$T = T_2 + T_0$$

$$U = 0$$

$\Rightarrow$ $T_2 - T_0 = cte$

no es la energía mecánica