Teoría Electromagnética
Curso 2024

Práctico 2
Electrostática

1. Coordenadas cartesianas

a) Las aristas de una caja bidimensional cuadrada de lado $2a$ se encuentran a potenciales fijos. Determine el potencial electrostático en la caja si dos caras opuestas están a potenciales V_0 y $-V_0$ y las restantes a potencial 0.

b) Las caras de una caja cúbica de lado L se encuentran a potenciales fijos. Dos caras contiguas están a potencial V_0 y el resto a potencial 0. Determine el potencial electrostático dentro de la caja.

c) Un pozo rectangular está formado por un segmento de largo $2a$ a potencial $V(x)$ y dos lados semi-infinitos a potencial 0. Determine el potencial en el pozo si:

i) $V(x) = V_0$

ii) $V(x) = \begin{cases} -V_0 & 0 < x < a \\ V_0 & a < x < 2a \end{cases}$

d) Un capacitor de placas paralelas infinitas (bi-dimensional) tiene un lado a potencial 0 y el otro también, salvo por un segmento de longitud $2a$, que se encuentra a potencial V_0. Determine el potencial dentro del capacitor.

e) Determine el potencial entre dos planos paralelos separados una distancia d, ambos a potencial cero salvo por un cuadrado de lado a en uno de ellos a potencial V_0.

Coordenadas esféricas

2. Dada la ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l + 1)y = 0,$$

llamamos polinomio de Legendre de orden n a su solución regular en el intervalo $[-1, 1]$ que cumple $P_l(1) = 1$.

a) Escriba el desarrollo en polonomios de Legendre de las funciones

i) $f(x) = 1 - x^2$

ii)$f(x) = 1 - |x|$

en el intervalo $(-1, 1)$.

b) *Fórmula de Rodrigues.* Pruebe que el polinomio $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l}(x^2 - 1)^l$ es el Polinomio de Legendre de orden l.

c) Los Polinomios de Legendre también se pueden obtener de la función generatriz

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} \equiv \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l.$$

Verifique explícitamente que la fórmula es correcta para $l = 0, 1$. Pruebe en general que los polinomios de esta fórmula cumplen la fórmula de Rodrigues de los polinomios de Legendre.
Ayuda: considere la serie de Maclaurin de $f(u) = (1 - u)^{-1/2}$ y el teorema del binomio, eligiendo como binomio $u = 2xt - t^2$.

3. Planteando el teorema de Green para las funciones $\phi(y) = G_D(x, y)$ y $\psi(y) = G_D(x', y)$ donde y es la variable de integración y x, x' son parámetros, pruebe que la función de Green para el problema de Dirichlet debe ser simétrica.

4. Desarrollo en armónicos esféricos

a) Demuestre que:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\gamma)$$

donde:

$$\begin{aligned} \cos\gamma &= \frac{\vec{x}.\vec{x}'}{|\vec{x}|\,|\vec{x}'|} \\ r_> &= \max\left(|\vec{x}|, |\vec{x}'|\right) \\ r_< &= \min\left(|\vec{x}|, |\vec{x}'|\right) \end{aligned}$$

b) Demuestre el teorema de adición de armónicos esféricos:

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$$

donde $\cos\gamma = \cos(\theta)\cos(\theta') + \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\theta')\cos(\phi - \phi')$.

c) Finalmente deduzca que la expansión de $\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$ en armónicos esféricos es:

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\frac{4\pi}{2l+1}Y_{lm}^*(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi).$$

5. Un cascarón esférico está compuesto por 2 semiesferas a potenciales V_0 y $-V_0$ separadas por un material no conductor de ancho despreciable.

a) Determine la función de Green para resolver el problema exterior.

b) Exprese la solución del potencial en términos de las variables que se muestran en la figura 1.

c) Obtenga una expresión cerrada (resolviendo las integrales) para el potencial en el eje z.

d) Calcule los primeros términos del potencial desarrollándolo en series de potencias para $a/|x|$.

e) Escriba la función de Green de la parte a) como una expansión en armónicos esféricos, muestre que el potencial se reduce a una expansión en polinomios de Legendre y obtenga una expresión general para el potencial. Compare con el resultado obtenido en d).

f) Repita el cálculo anterior pero partiendo de una solución genérica de la ecuación de Laplace en el exterior.

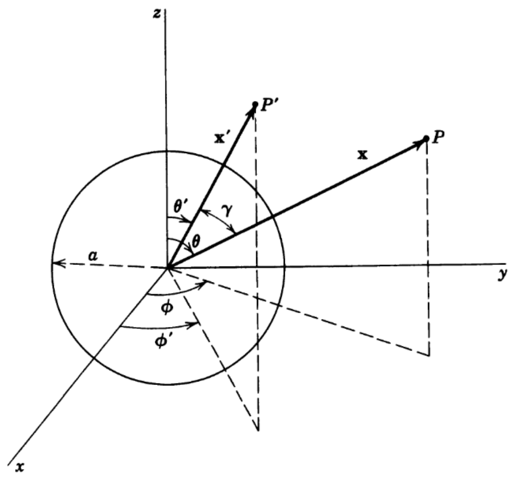

Figura 1: Coordenadas para expresar funciones de Green en esféricas.

6. Considere una carga q uniformemente distribuida en un aro de radio a.

a) Determine el potencial en el eje como una expansión en polinomios de Legendre, usando coordenadas esféricas de acuerdo a la figura 2, donde el eje del aro coincide con el eje z y el centro del aro está en la posición $z = b$.

b) Determine el potencial en todo el espacio.

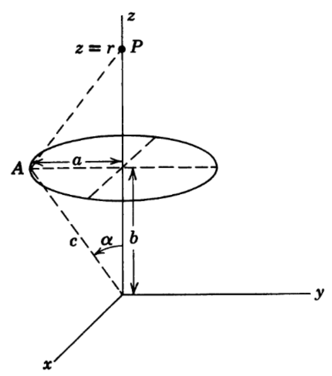

Figura 2: Aro cargado. *Imagen de J.D. Jackson, Classical Electrodynamics (1999).*

7. Esferas concéntricas.

a) Demuestre que la función de Green para el problema de Dirichlet entre dos esferas concéntricas de radios a y b es:

$$G_D\left(\vec{x}, \vec{x}'\right) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)}{(2l+1)\left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}\right]} \left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}}\right) \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right).$$

b) Estudie los límites $a \to 0$, $b \to \infty$ y $a = cte$, $b \to \infty$. Interprételos.

8. Calcule el potencial debido a una cáscara esférica de radio a con densidad de carga uniforme σ_0 pero sin la parte correspondiente al interior de un cono θ_0 (un *mate* con densidad de carga uniforme) tanto dentro como fuera de la cáscara.

9. Calcule el potencial dentro de un cascarón esférico a potencial V_0 que contiene un dipolo $\vec{p}$ en el centro.

10. Un disco de radio a y cargado con carga Q distribuida uniformemente (ver figura 3), se ubica dentro de una esfera conductora de radio b, que se encuentra conectada a tierra. Los centros del disco y de la esfera coinciden.

a) Determine el potencial en todos los puntos del eje del disco.

b) Determine el potencial en todo el interior de la esfera.

c) Determine la densidad de carga inducida en la esfera.

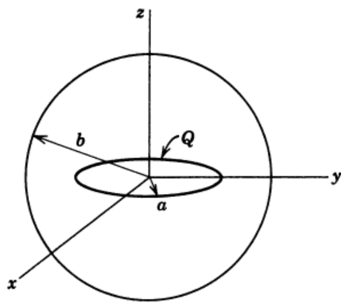

Figura 3: Disco cargado en esfera conductora.

11. Considere el sistema de la figura 4, formado por dos esferas conductoras concéntricas de radios a y b. Cada esfera está dividida en el ecuador en dos hemisferios y los cuatro hemisferios resultantes se mantienen a tierra y $+V$ según se indica en la figura.

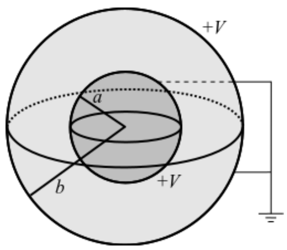

Figura 4: Esferas conductoras concéntricas.

a) Utilizando la función de Green adecuada, halle una expresión integral para el potencial entre las esferas.

b) Desarrollando los integrandos de la expresión anterior, obtenga una forma explícita del potencial (sólo se pide conservar términos a primer orden).

Coordenadas cilíndricas

12. Calcule el potencial en el interior de un cilindro circular recto de radio a y altura h si:

a) el potencial en la cara lateral y una tapa es cero, y en la otra tapa es $V_0\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]$.

b) el potencial en la cara lateral y una tapa es cero, y en la otra tapa es $V_0 \operatorname{sen}(2\phi)$.

c) el potencial es cero en las tapas y V_0 (uniforme) en la superficie lateral.

d) el potencial es cero en las tapas y $V_0\frac{z(h-z)}{h^2}$ en la superficie lateral.

Nota: Recuerde que $\int xJ_0(x)\,dx = xJ_1(x)\,,\int x^3J_0(x)\,dx = 2x^2J_2(x) - x^3J_3(x)\,.$

Imágenes múltimples

15. Un dipolo puntual $\vec{p}$ se ubica a una distancia h de un plano conductor conectado a tierra, de manera que el momento dipolar forma un ángulo θ con respecto a la normal al plano.

a) Indique la posición y orientación de un dipolo imagen para resolver el potencial electrostático en el lado del semiplano que contiene al dipolo.

b) Determine la fuerza elestrostática sobre el dipolo.

c) Determine el trabajo necesario para remover el dipolo, es decir para llevarlo al infinito.

16. Una esfera conductora de radio r, a potencial V (esfera 1), se encuentra a una distancia d de otra esfera conductora de radio R conectada a tierra (esfera 2), de manera que $d > r + R$. Para resolver el potencial electrostático en el exterior de ambas esferas use el método de las imágenes de manera recursiva. Para ello:

a) Coloque una carga imágen en el interior de la esfera 1 de manera de fijar el potencial en su superficie a su valor correcto.

b) Coloque una carga imágen en el interior de la esfera 2, de manera de ajustar el potencial sobre esta esfera a su valor correcto.

c) Repita de manera iterativa, para ir corrigiendo el potencial en la superficie de cada esfera de manera alternada y presente la expresión general del algoritmo iterativo.