Ecuaciones Diferenciales

Práctica 3: Ecuaciones de Laplace y de Poisson

Ejercicio 1. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Se dice que $u \in C^2(U)$ es *subarmónica* (resp. *superarmónica*) en U si $-\Delta u \leq 0$ en U (resp. $-\Delta u \geq 0$ en U). Demostrar los siguientes resultados:

1. Si u es armónica en U y $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es convexa y dos veces derivable entonces $v = \phi \circ u$ es subarmónica en U.
2. Si u es armónica en U entonces $v = |\nabla u|^2$ es subarmónica en U.

Ejercicio 2.

1. (Desigualdad de valor medio). Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Demostrar que $u \in C^2(U)$ es subarmónica (resp. superarmónica) en U si y sólo si para toda bola $B_r(x) \subset\subset U$ se tiene:
$$u(x) \leq \fint_{\partial B_r(x)} u \, d\sigma \qquad (\text{resp. } u(x) \geq \fint_{\partial B_r(x)} u \, d\sigma)$$
Verificar que se puede reemplazar $\fint_{\partial B_r(x)} u \, d\sigma$ por $\fint_{B_r(x)} u(y) \, dy$.
2. (Principio débil del máximo). Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Demostrar que si $u \in C(\bar{U}) \cap C^2(U)$ es subarmónica (resp. superarmónica) en U entonces:
$$\max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u \qquad (\text{resp.} \min_{\bar{U}} u = \min_{\partial U} u)$$
Sugerencia: Hacer primero la demostración suponiendo $-\Delta u < 0$. Considerar luego $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon |x|^2$ y hacer $\varepsilon \to 0$.
3. (Principio fuerte del máximo). Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado y conexo. Demostrar que si $u \in C(\bar{U}) \cap C^2(U)$ es subarmónica (resp. superarmónica) en U y existe $x_0 \in U$ tal que $u(x_0) = \max_{\bar{U}} u$ (resp. $u(x_0) = \min_{\bar{U}} u$) entonces u es constante en U.

   Deducir que si $v \in C(\bar{U}) \cap C^2(U)$ es superarmónica en U con $v \geq u$ en ∂U entonces $v > u$ en U o $v \equiv u$.

Ejercicio 3. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones armónicas en U. Demostrar que si $u_k \to u$ uniformemente sobre cada subconjunto compacto de U para $k \to \infty$, entonces u es armónica en U.

Ejercicio 4. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado.

1. Sea $u \in C(\bar{U}) \cap C^2(U)$ una solución de:
$$\Delta u = f \quad \text{en} \quad U, \qquad u = g \quad \text{sobre} \quad \partial U.$$
Demostrar que si f es acotada en $\bar{U}$ entonces existe una constante $C > 0$ tal que:
$$\max_{\bar{U}} |u| \leq C \left(\max_{\partial U} |g| + \max_{\bar{U}} |f| \right).$$
¿De qué datos depende la constante C?
2. Sea $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C(\bar{U}) \cap C^2(U)$ una sucesión donde cada u_k es solución de:
$$\Delta u_k = 0 \quad \text{en} \quad U, \qquad u_k = g_k \quad \text{sobre} \quad \partial U.$$
Demostrar que si $g_k \to g$ uniformemente en ∂U para $k \to \infty$, entonces existe $u \in C(\bar{U}) \cap C^2(U)$ armónica tal que $u_k \to u$ uniformemente en U si $k \to \infty$.

Ejercicio 5 (Teorema de Harnack de convergencia monótona)**.** Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y conexo, y $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones armónicas en U. Probar que si $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es monótona entonces $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge en todo punto o diverge en todo punto. En el primer caso, la convergencia es uniforme sobre subconjuntos compactos de U y el límite es una función armónica en U.

Ejercicio 6. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Un operador diferencial de la forma:

$$\mathcal{L}u := -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u + c(x)u,$$

se dice *elíptico* si $a_{ij}, b_i, c \in C(\bar{U})$, $i, j = 1, \ldots, n$, y la matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ es simétrica y definida positiva para cada $x \in \bar{U}$.

1. (Principio débil del máximo). Suponer $c \equiv 0$. Demostrar que si $u \in C(\bar{U}) \cap C^2(U)$ es tal que $\mathcal{L}u \leq 0$ en U entonces:
$$\max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u.$$
2. Suponer $c \geq 0$ en U. Demostrar que si $u \in C(\bar{U})C^2(U)$ es tal que $\mathcal{L}u \leq 0$ entonces:
$$\max_{\bar{U}} u \leq \max_{\partial U} u^+,$$
donde $u^+ = \max\{u, 0\}$ es la parte positiva de u. Dar un contraejemplo si $c < 0$.
3. Suponer $c \geq 0$ en U. Demostrar que si $u, v \in C(\bar{U}) \cap C^2(U)$ son tales que $\mathcal{L}u = \mathcal{L}v$ en U y $u = v$ en ∂U entonces $u = v$ en U. Dar un contraejemplo si U no es acotado.

Ejercicio 7 (Lema de Hopf)**.** Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Considerar $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$ y $x_0 \in \partial U$ tales que:

$$\Delta u \geq 0 \quad \text{en} \quad U, \qquad\qquad u(x_0) > u \quad \text{en} \quad U.$$

Probar que si existe una bola $B \subset U$ tal que $x_0 \in \partial B$ (esto se conoce como la propiedad de bola tangente interior en x_0) entonces $\partial_{\mathbf{n}} u(x_0) > 0$.

Ejercicio 8. Usar el lema de Hopf para para probar el principio fuerte del máximo para funciones armónicas.

Ejercicio 9.
1. (Estimaciones de las derivadas). Sean $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset\subset U$ y u armónica en U. Probar que existe una constante $C > 0$ tal que:
$$\sup_V |\nabla u| \leq C \sup_U |u|,$$
y que se puede elegir C de la forma $\frac{C(n)}{R}$ para $U = B_R(0)$ y $V = B_{R/2}(0)$, donde $B_r(a)$ es la bola con radio r y centro a.
2. (Teorema de Liouville). Probar que si u es armónica y acotada en $\mathbb{R}^n$ entonces u es constante.
3. Demostrar que si u es armónica en $\mathbb{R}^n$ y satisface la siguiente condición de crecimiento:
$$|u(x)| \leq C(1 + |x|^k) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$
entonces u es un polinomio de grado a lo sumo k.

Ejercicio 10.

1. (Principio de reflexión impar en la bola unitaria). Sean $B \subset \mathbb{R}^n$ la bola unitaria centrada en el origen y $u \in C(B^+ \cup \Gamma_0)$ armónica en B^+ tal que $u = 0$ sobre Γ_0, donde:
$$B^+ = \{x \in B : x_n > 0\}, \qquad \Gamma_0 = \{x \in B : x_n = 0\}.$$
Probar que la función U definida por:
$$U(x) := \begin{cases} u(x) & \text{si} \quad x_n \geq 0, \\ -u(x', -x_n) & \text{si} \quad x_n < 0, \end{cases}$$
es armónica en B. Concluir que $u \in C^\infty(B^+ \cup \Gamma_0)$.

2. Demostrar que existe a lo sumo una solución acotada de:
$$\Delta u = f \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^n_+, \qquad u = g \quad \text{sobre} \quad \partial\mathbb{R}^n_+,$$
en $C^2(\mathbb{R}^n_+) \cap C(\mathbb{R}^n_+ \cup \partial\mathbb{R}^n_+)$, donde:
$$\mathbb{R}^n_+ := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}, \quad \partial\mathbb{R}^n_+ := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}.$$
¿Sigue valiendo la unicidad si se elimina la hipótesis de que la solución sea acotada?

Ejercicio 11. Demostrar que si $u \in C(\overline{B_R(0)}) \cap C^2(B_R(0))$ es una función armónica y no negativa entonces:
$$\frac{R^{n-2}(R - |x|)}{(R + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq \frac{R^{n-2}(R + |x|)}{(R - |x|)^{n-1}} u(0) \qquad \forall\, x \in B_R(0).$$