Solución primer parcial

Física Moderna - 2023

1 Ejercicio 1

Una cuerda tensa puede vibrar transversalmente y soportar ondas sinusoidales que se propagan a lo largo de la cuerda con una velocidad característica v_c.

Considere una cuerda de guitarra de largo L, fija en sus dos extremos.

a. Halle la mayor longitud de onda de una vibración sinusoidal de la cuerda. Halle la correspondiente frecuencia de vibración ν_0.

> **Solución:**
>
> El modo de vibración de menor frecuencia (es decir el de mayor longitud de onda) corresponde a aquel con solamente dos nodos de desplazamiento ubicados en los extremos fijos. Esto es, media longitud de onda igual al largo de la cuerda. Luego:
>
> $$\lambda_0 = 2L \Rightarrow \nu_0 = \frac{v_c}{2L}$$

b. Exprese en función de v_C y L todas las frecuencias posibles de vibración de la cuerda. Cada una de esas frecuencias corresponde a un modo de vibración.

> **Solución:**
>
> Los modos de mayor frecuencia presentan un nodo adicional, dos nodos adicionales, etc. Las frecuencias de vibración se pueden enumerar como:
>
> $$\nu_n = n\nu_0 = \frac{v_c}{2L}n, \quad n = 1, 2, 3 \cdots \in \mathbb{N}$$

Sea $dN = \rho(\nu)d\nu$ el número de modos de vibración de la cuerda con frecuencias comprendidas entre ν y $\nu + d\nu$.

c. Halle $\rho(\nu)$ suponiendo $\nu \gg \nu_0$. Tenga en cuenta que la cuerda puede vibrar en dos planos perpendiculares.

> **Solución:**
>
> Tenemos una frecuencia de vibración por cada intervalo $\frac{v_c}{2L}$. En base a la hipótesis, hallamos que la densidad de modos es:
>
> $$\rho(\nu) = 2 \times \frac{2L}{v_c}$$
>
> donde tenemos un factor 2 que viene de las dos polarizaciones posibles.

Suponga que los modos de vibración de la cuerda son osciladores armónicos.

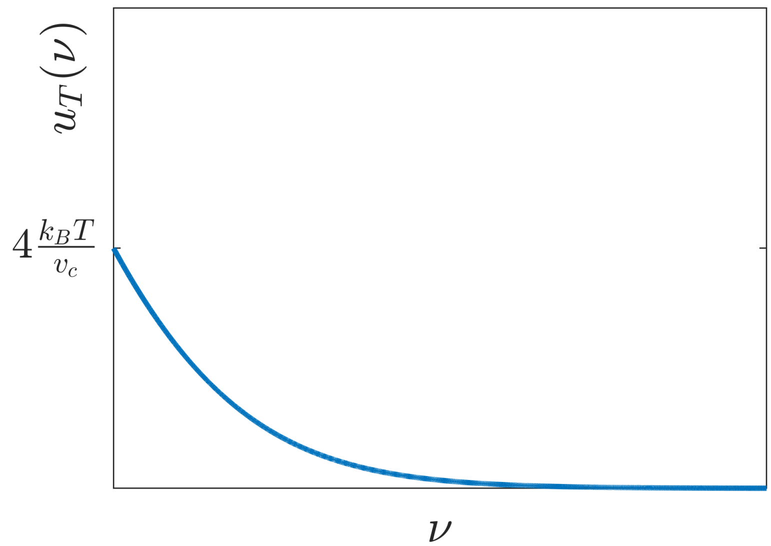
d. Utilizando la hipótesis de Planck, halle la densidad de energía $u(\nu)$ (energía por unidad de longitud y por unidad de frecuencia) de una cuerda de guitarra en equilibrio térmico a temperatura T.*Observe que el resultado no depende de L lo cual permite considerar una cuerda tan larga como se quiera (infinita).* Represente gráficamente la función$u(\nu)$.

Solución:

La densidad de energía por unidad de longitud y frecuencia es igual al producto de la densidad de modos de vibración por la energía media correspondiente de tales modos, dividido el largo de la cuerda:

$$u_T(\nu) = \frac{\bar{\varepsilon}_T(\nu)\rho(\nu)}{L} = \frac{4}{v_c}\frac{h\nu}{\mathrm{e}^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

Podemos observar como la dependencia en L se cancela.



e. ¿Cómo varía con la temperatura la potencia sonora total (incluyendo todas las frecuencias) emitida por metro por una cuerda tensa larga en equilibrio termodinámico a la temperatura T?

Solución:

Asumiendo que la potencia emitida $P_T(\nu)$ es proporcional a la densidad de energía $u_T(\nu)$, la potencia total emitida será entonces proporcional a la integral de $u_T(\nu)$:

$$P(T) \propto \frac{4h}{v_c}\int_0^\infty \frac{\nu\ d\nu}{\exp\frac{h\nu}{k_B T} - 1} = \left[\nu \to x = \frac{h\nu}{k_B T}\right] = \frac{4k_B^2 T^2}{v_c h}\int_0^\infty \frac{x\ dx}{e^x - 1}$$

$$\Rightarrow P(T) \propto T^2$$

La potencia sonora total emitida es proporcional al cuadrado de la temperatura.

2 Ejercicio 2

Los niveles de energía de un átomo neutro en el que un sólo electrón se promueve a un estado muy excitado se denomina niveles de Rydberg y su energía puede ser determinada aproximadamente mediante la fórmula de Bohr para el átomo de Hidrógeno $E_n = -R/n^2$ donde R es la constante de Rydberg.

a. Justifique cualitativamente la afirmación anterior.

> **Solución:**
>
> Al ser n muy grande, en promedio el electrón se encontrará a una distancia grande del núcleo y los demás electrones ($\langle\sqrt{r^2}\rangle \gg a_0$) por lo cual un modelo efectivo adecuado para describir su dinámica es la del modelo de Bohr, donde los electrones de las capas interiores, en primera aproximación, se encuentran muy cercanos al núcleo y apantallan la carga positiva de este; resultando en una interacción similar a la del electrón con el núcleo en el átomo de Hidrógeno.

b. Halle el menor valor de n para que la diferencia de energía $E_{n+1} - E_n$ corresponda a una frecuencia de radiación de 10GHz. *Sugerencia: puede ser de utilidad la expresión aproximada* $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \simeq \frac{2}{n^3}$ *válida para* $n \gg 1$.

> **Solución:**
>
> Utilizando la sugerencia, calculamos el n tal que la frecuencia aproximada correspondiente a la transición $n+1 \to n$ sea 10GHz :
>
> $$\nu = \frac{-\Delta E}{h} \simeq \frac{2R}{n^3} \Rightarrow n = \left(\frac{2R}{h\nu}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 86.96 \to \boxed{n = 87}$$

El primer estado excitado del átomo de rubidio (Rb) se encuentra 2.63eV por debajo del límite de ionización ($E = 0$).

c. Halle la longitud de onda del láser que debería usarse para llevar un átomo de Rb desde su primer estado excitado al estado de energía E_n calculado en (b)

> **Solución:**
>
> El estado inicial tiene una energía, medida respecto al nivel de ionización $E = 0$ de $E_i = -2.63\,\mathrm{eV}$ y el estado final, con $n = 87$ tiene una energía $E_f = -1.80 \times 10^{-3}\,\mathrm{eV}$. Luego debemos utilizar un láser de longitud de onda:
>
> $$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{hc}{2.628 \times 10^{-3}\,\mathrm{eV}} = 472\,\mathrm{nm}$$
>
> Debemos utilizar un láser con luz de $\lambda = 472\,\mathrm{nm}$.