Práctico 4

Variedades parte II

1. Dado $p \in S^2$, probar que $T_pS^2 = \{p\}^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, p \rangle = 0\}$.

2. Sea $M \subset \mathbb{R}^k$ una variedad diferenciable. Mostrar que si U es abierto en M, entonces U es una variedad diferenciable. Además, si $p \in U$ entonces $T_pU = T_pM$. Finalmente, si $N \subset \mathbb{R}^l$ es otra variedad y $f : M \longrightarrow N$ es diferenciable, entonces $D_pf = D_p\left(f|_U\right)$.

3. Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y $p_0 \in \mathbb{R}^3$ fijo. Definamos $f : S \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(p) = \| p - p_0 \|^2$.

   a) Probar que f es diferenciable y que $Df_p(v) = 2\langle p - p_0, v \rangle, \forall p \in S, v \in T_pS$.
   b) Si $p_0 \notin S$, definimos $g : S \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(p) = \| p - p_0 \|$. Mostrar que g es diferenciable y que $D_pg(v) = \dfrac{\langle p - p_0, v \rangle}{\| p - p_0 \|}$.

4. Sean $M \subset \mathbb{R}^n$ una variedad conexa y $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Mostrar que si $D_pf = 0$ para todo $p \in M$ entonces f es constante.

5. Hallar difeomorfismos entre las siguientes superficies: el cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$, el cono $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$ y el plano menos un punto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Observar que el cono con el vértice $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0\}$ no es una variedad.

6. Si M es una hipersuperficie en $\mathbb{R}^n$ y $p \in M$, se define la *recta normal* a M en p como la recta que pasa por p y es perpendicular a T_pM. Mostrar que si todas las rectas normales a una hipersuperficie conexa pasan por el origen, entonces la hipersuperficie está contenida en una esfera.

7. *Variedades producto.* Sean M y N dos variedades diferenciables, y sean $p \in M$, $q \in N$.

   a) Probar que si $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^k \to U_p \subseteq \mathbb{R}^m$ y $\psi : V \subseteq \mathbb{R}^l \to V_q \subseteq \mathbb{R}^n$ son parametrizaciones, entonces $\eta : U \times V \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \to U_p \times V_q \subseteq \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ es una parametrización.
   b) Concluir que $M \times N$ es una variedad, con $\dim(M \times N) = \dim M + \dim N$, y probar que existe un isomorfismo natural entre $T_{(p,q)}(M \times N)$ y $T_pM \oplus T_qN$.

8. Sea $SL_2(\mathbb{R}) := \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\} \subset \mathbb{R}^4$. Probar que $SL_2(\mathbb{R})$ es una variedad diferenciable de dimensión 3 y hallar el espacio tangente $T_{Id}SL(2, \mathbb{R})$.

9. Probar que el producto de variedades orientables también es orientable.

10. Probar que si M y N son variedades difeomorfas, entonces M es orientable si y sólo si N lo es. Deducir que si una variedad M tiene un subconjunto abierto difeomorfo a una cinta de Möbius, entonces M no es orientable.

11. Sea $(M, \mathcal{A})$ una variedad orientada conexa, y sea $\varphi : U \to M$ una parametrización, con U conexo. Probar que, o bien φ es positiva (es decir: $\det(\psi^{-1} \circ \varphi)'(x) > 0$ $\forall \psi \in \mathcal{A}$ y $x \in \varphi^{-1}(\mathrm{Im}\varphi \cap \mathrm{Im}\psi)$, o bien es negativa (es decir: el determinante anterior es siempre negativo). Deducir que una variedad conexa admite exactamente dos orientaciones.

12. Sea $f : M \to N$ un difeomorfismo entre variedades con borde. Probar que $f(\partial M) = \partial N$, y que si $g : \partial M \to \partial N$ está dada por $g(p) = f(p)$, $\forall p \in \partial M$, entonces g es un difeomorfismo, y $Dg_p : T_p(\partial M) \to T_{f(p)}(\partial N)$ satisface $Dg_p(v) = Df_p(v)$, $\forall v \in T_p(\partial M)$.

Ejercicios complementarios:

14. Sea $F : M_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sim}_n(\mathbb{R})$ dada por $F(A) := A^t A$, donde $\mathrm{Sim}_n(\mathbb{R}) := \{B \in M_n(\mathbb{R}) : B^t = B\}$.

    a) Probar que F es de clase C^∞, y calcular DF_A (recordar que si F es diferenciable en A, entonces $DF_A(V) = \frac{\partial F}{\partial V}(A)$, $\forall V \in M_n(\mathbb{R})$).

    b) Mostrar que $Id \in \mathrm{Sim}_n(\mathbb{R})$ es un valor regular de F.

    c) Sea $O(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t A = Id\}$ el grupo de matrices ortogonales de tamaño n. Demostrar que $O(n)$ es una variedad diferenciable de dimensión $\frac{1}{2}(n^2 - n)$.

    d) Para cada $A \in O(n)$, calcular el espacio tangente $T_A(F)$.

15. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$. Probar que $P := f(S^2)$ es una variedad C^∞ de dimensión 2 contenida en $\mathbb{R}^4$, compacta y no orientable (P es conocida como *plano proyectivo*).

16. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^9$ el conjunto de las matrices 3×3 y rango 1. Probar que M es una variedad de dimensión 5 que tiene un atlas formado por tres parametrizaciones. Demostrar que M es orientable (mostrar que es constante el signo de los jacobianos de los cambios de parametrización).

17. Sea $N \subseteq \mathbb{R}^6$ el conjunto de las matrices 2×3 y rango 1. Probar que N es una variedad de dimensión 4 que tiene un atlas formado por dos parametrizaciones. Demostrar que N no es orientable (sugerencia: razonar como en el ejercicio anterior, y usar el Ejercicio 11).