Sistemas anholónomos

Sistemas en los cuales todos los vínculos se expresan como

$$f(\vec{r}_1, \ldots \vec{r}_N, t) = 0 \quad \Rightarrow \text{holónomos}$$

En caso que haya vínculos

$$f(\vec{r}_1, \ldots \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \ldots \dot{\vec{r}}_N, t) = 0 \quad \Rightarrow \text{anholónomos}$$

Vamos a estudiar casos en que tengo vínculos que dependen de las velocidades generalizadas

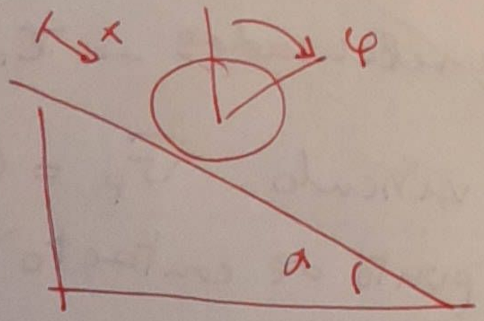
$$\sum_i A_i(q,t)\,\dot{q}_i + B(q,t) = 0$$

se llaman vínculos cinemáticos o de movilidad

Si hay varios vínculos de este tipo me interesa las combinaciones lineales independientes

* Si tenemos s vínculos de movilidad y hay r combinaciones lineales independientes integrables decimos que el grado de anholonomía es $s-r$

Ejemplo Disco RSD m, R

1) 

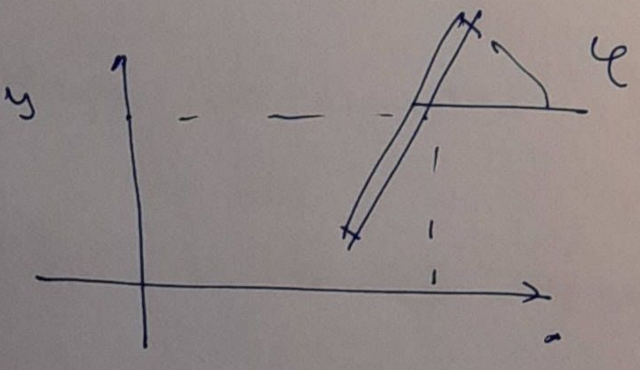
Velocidad punto contacto n

$$\vec{v}_p = 0$$

$$\dot{x} - R\dot{\varphi} = 0$$

Tengo 2 coord. generalizadas y un vínculo

2) Filo de cuchillo = barra que se mueve de modo que la velocidad del baricentro sea // a la dirección de la barra



$$\vec{v}_G = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}$$

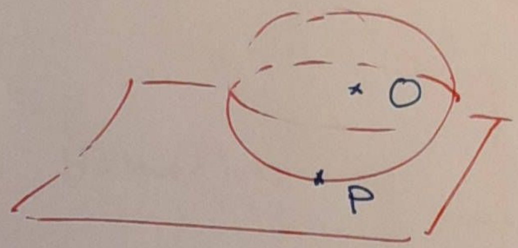
φ dirección de la barra

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

3 c. g. $\rightarrow$ x, y, φ

+ un vínculo $\boxed{\operatorname{tg}\varphi\, \dot{x} + \dot{y} = 0}$

3)



Esfera RSD

$x, y \to$ centro

$\psi, \theta, \phi \to$ ángulos de Euler

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P - O)$$

$$\vec{\omega} = (\dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta)\,\hat{k} + (\dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\phi)\,\hat{i} + (\dot{\theta}\sin\phi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\phi)\,\hat{j}$$

Hago las cuentas

$$\vec{v}_P = \left(\dot{x} - R(\dot{\theta}\sin\phi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\phi)\right)\hat{i} + \left(\underbrace{\dot{y} + R(\dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\phi)}_{=0}\right)\hat{j} = 0$$

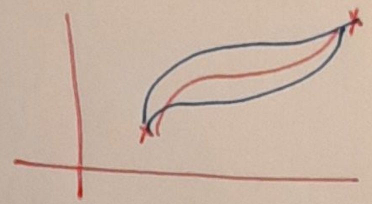
$$\begin{cases} \dot{x} = R(\dot{\theta}\sin\phi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\phi) \\ \dot{y} = -R(\dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\phi) \end{cases}$$

↳ Seran integrables?

Existe $f(x, y, \theta, \phi, t)$ que derivada obtenga los vínculos??

Multiplicadores de Lagrange

P. de Hamilton



$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,(q(t), \dot q(t), t)\, dt = 0 \qquad \text{con} \quad \begin{array}{l} \delta q_j(t_1) = 0 \\ \delta q_j(t_2) = 0 \end{array}$$

es condición necesaria y suficiente para

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad j = 1, \dots n$$

Las variaciones eran δq_j desplazamientos virtuales

Ahora agregamos los vínculos de movilidad

$$\sum_k a_{\ell k} \dot q_k + b_\ell = 0 \qquad \ell = 1, \dots m$$

Postulamos que el P. de H. para sistemas con vínculos dice

$$\delta \int L\, dt = 0$$ con δq_j que satisfagan

$$\sum_k a_{\ell k}\, \delta q_k = 0$$

Problema de extremo condicionados

Para resolver el problema de extremos condicionados introducimos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ un multiplicador por cada vínculo.

Tomamos cada vínculo $\sum_k a_{\ell k} \delta q_k = 0$ y multiplicamos c/u por λ_ℓ

$$\sum_\ell \lambda_\ell \sum_k a_{\ell k} \delta q_k = 0$$

~~Multiplicamos por~~ Integramos en dt y sumamos al P. de Hamilton

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_k \Big[\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\Big) + \sum_\ell \lambda_\ell a_{\ell k}}_{= 0\ ??} \Big] \delta q_k = 0$$

Ahora decimos que los $k = 1, \ldots n-m$ son nulos porque los tomamos indep. y los restantes también porque elegimos los multiplicadores para que los coef. sean nulos $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\Big) - \dfrac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_\ell \lambda_\ell a_{\ell k} & k = 1, \ldots n \\ \sum_k a_{\ell k} \dot{q}_k + b_\ell = 0 & \ell = 1, \ldots m \end{array}}$$

Tenemos $n+m$ ecuaciones y la misma cantidad de incógnitas.

Interpretación El sistema de vínculos anholónomos equivale a poner fuerzas generalizadas

$$Q'_k = \sum_l \lambda_l a_{l_k}$$

Obs El P. de Hamilton para sistemas anholónomos también implica que las fuerzas de ligadura no trabajan en desplazamientos virtuales

Teníamos $\delta \int_{t_1}^{t_2} L \, dt = 0 \underset{L=T-U}{\Rightarrow} \delta \int_{t_1}^{t_2} T \, dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} U \, dt$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T \, dt = - \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_k Q_k \, \delta q_k \Rightarrow$$

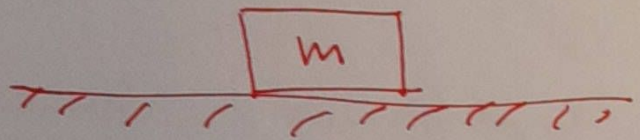
Definición de Fuerza generalizada

Toda la variación de la E. cinética viene de las Q_k pero no hay términos que vengan de Q'_k

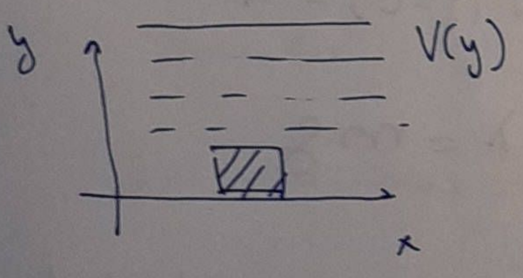
$\Rightarrow$ las fuerzas que vienen de los vínculos no holónomos no trabajan en D.V.

Vínculos anholónomos: Ejemplos

1) Bloque sobre un plano: hallar la fuerza del vínculo con el plano por el método de los multiplicadores de Lagrange



<u>Solución</u> Consideramos coord. generalizadas x, y (2 gr. libertad) con un vínculo $y = 0$



Escribimos el vínculo como

$$\dot{y} = 0$$

Se puede ver que $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(y)$

las ec. de mov. en general son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{\ell} \lambda_\ell a_{\ell k} \qquad k = 1, \dots, n$$

y los vínculos del tipo

$$\sum_k a_{\ell k} \dot{q}_k + b_\ell = 0 \qquad \ell = 1, \dots, m$$

Como tenemos un vínculo introducimos un solo λ

$a_x = 0$

$a_y = 1$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \\ \frac{d}{dt}(m\dot{y}) + V'(y) = 1 \cdot \lambda \quad + \left\{ \begin{array}{l} \text{condiciones} \\ \text{iniciales} \end{array} \right. \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

Se resuelve fácilmente $\Rightarrow$ $m\dot{x} = \underline{cte}$

$V'(y=0) = \lambda$

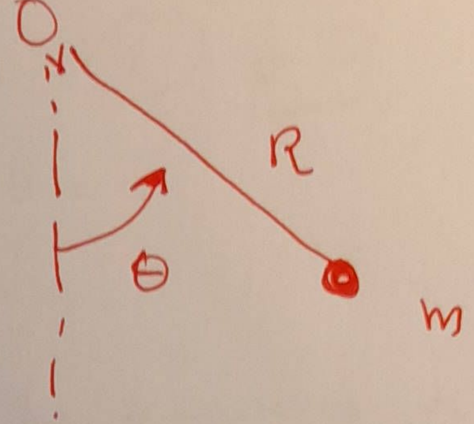
Obviamente si $V(y) = mgy \Rightarrow \lambda = mg$

<u>Observación</u> Si consideramos un solo gr. de libertad y <u>ningún</u> vínculo, el problema queda

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 \Rightarrow m\dot{x} = cte$$

pero no obtengo información sobre la fuerza del vínculo.

2) Péndulo plano: hallar la tensión del hilo por el método de los multiplicadores de Lagrange



Solución: Consideramos 2 gr. libertad con un vínculo $\Rightarrow r, \theta$

$$L = \frac{m}{2}\left(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2\right) + mgr\cos\theta$$

vínculo $r = R \Rightarrow \dot{r} = 0$

Introducimos un λ $\quad a_r = 1 \quad a_\theta = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_\lambda \lambda_e a_{ek}$$

r) $\quad m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta = 1 \cdot \lambda$

θ) $\quad \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) + mgr\,\text{sen}\,\theta = 0$

Vínculo $\quad \dot{r} = 0$

Resolvemos
$$mr^2\ddot{\theta} + mgr\,\text{sen}\,\theta = 0$$
$$-mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta = \lambda \quad \Rightarrow$$

Sistema 2 E.D.O. con 2 incógnitas

Se multiplica por $\dot{\theta}$ la 1era y se integra

Obs lo que "no" puedo hacer:

usar el vínculo pero igualar a 0 las ec.

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta = \lambda \neq 0$$

$= 0$ Mal

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) + mgr\sin\theta = 0$$

$$\dot{r} = 0$$

sustituyo $\dot{r} = 0$ en las ecuaciones de arriba

$$-mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta = 0 \quad \text{(Mal)}$$

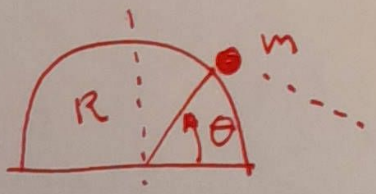
$$\cancel{mr\ddot{\theta} + mgr\cos\theta\,\dot{\theta} = 0 \Rightarrow}$$

$$mr^2\ddot{\theta} + mgr\sin\theta = 0 \Rightarrow m\frac{r^2}{2}\dot{\theta}^2 - mgr\cos\theta = E$$

sustituyo en las otras $\Rightarrow$ $E = \frac{3}{2}mr^2\dot{\theta}^2$ (Mal)

$$\boxed{\text{Conclusión por cada vínculo tengo que agregar un multiplicador } \lambda}$$

3) Desprendimiento de masa m sobre cuerpo semicilíndrico de radio R. Parte de la posición más alta con velocidad despreciable



Solución: Como la masa se desprende cuando la normal se anula vamos a usar los multiplicadores de Lagrange

* Dos coord. generalizadas r, θ
* Vínculo $r = R \Rightarrow \dot{r} = 0 \Rightarrow$ "1" λ

$a_r = 1$

$a_\theta = 0$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr\,\text{sen}\,\theta$$

r) $m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg\,\text{sen}\,\theta + \lambda = 0$

θ) $m(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) + mgr\cos\theta = 0$

vínculo $\dot{r} = 0$

Resuelvo $-mR\dot{\theta}^2 + mg\,\text{sen}\,\theta + \lambda = 0$

$$mR^2\ddot{\theta} + mgR\cos\theta = 0 \Rightarrow$$

$\frac{mR^2}{2}\dot{\theta}^2 + mgR\,\text{sen}\,\theta = E$ como $\left.\begin{matrix}\theta = \pi/2 \\ \dot{\theta} = 0\end{matrix}\right\}$ en $t = 0$

$$\frac{mR^2}{2}\dot{\theta}^2 + mgR(\text{sen}\,\theta - 1) = 0$$

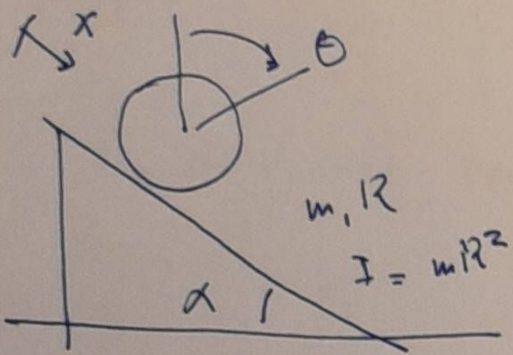
Sustituyo $\lambda = 0 \Rightarrow mR^2\dot{\theta}_c^2 = mg\,\text{sen}\,\theta_c\,R$

$$2\frac{mR^2}{2}\dot{\theta}_c^2 = 2mgR(1 - \text{sen}\,\theta_c)$$

Sumo $2mgR - 2mgR\,\text{sen}\,\theta_c = mgR\,\text{sen}\,\theta_c$

$$\Rightarrow \boxed{\text{sen}\,\theta_c = \frac{2}{3}}$$

Cilindro rueda sin deslizar sobre plano inclinad



Coord. generalizadas $\rightarrow$ x, θ

Vínculo $\dot{x} - R\dot{\theta} = 0$

$L = T - U$ $\qquad L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + R^2\dot{\theta}^2\right) - mg(l - x)\cos\alpha$

Introducimos λ $\qquad a_x = 1 \qquad a_\theta = -R$

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x} - mg\sin\alpha + \lambda &= 0 \\ mR^2\ddot{\theta} - \lambda R &= 0 \\ \dot{x} - R\dot{\theta} &= 0 \end{aligned}}$$