Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo diferencial e integral I
Primer semestre 2024

Práctico 4: Más sobre derivadas

1. Suponga que la derivada de una función f es $f'(x) = (x+1)^2(x-3)^5(x-6)^4$. ¿Sobre qué conjunto es f creciente?

2. Demuestre que $\tan x > x$ para $0 < x < \pi/2$ (sugerencia: bastaría con demostrar que $f(x) = \tan x - x$ es creciente en el intevalo $(0, \pi/2)$).

3. Considere la función $f(x) = x^4 - 4x^3$.

a) Encuentre los puntos de inflexión de $f(x)$.

b) Haga un esbozo de la curva de ecuación $y = f(x)$ (o sea, el gráfico de f) e indique los puntos de inflexión de dicha curva[1].

4. Considerar la curva de ecuación $x^2y + ax + by = 0$, donde a y b son parámetros a determinar.

a) Determinar a y b para que el punto $(2, 5/2)$ sea un punto de inflexión de la curva.

b) Hallar los puntos de inflexión adicionales.

5. Considere la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$, donde a y b son parámetros a determinar.

a) Calcular a y b sabiendo que la función tiene el valor mínimo local $-\frac{2}{9}\sqrt{3}$ en $x = \sqrt{3}/3$.

b) Determinar la pendiente mínima de las rectas tangentes a la curva de ecuación $y = f(x)$, donde a y b son los calculados en el inciso a).

6. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un polinomio de grado 3, considerar la ecuación $f(x) = 0$. Probar las siguientes afirmaciones:

a) La ecuación tiene al menos una raíz (sugerencia: usar el teorema de Bolzano).

b) La ecuación tiene a lo sumo 3 raíces (sugerencia: usar el teorema de Rolle).

7. Dos corredores inician una carrera al mismo tiempo y terminan en un empate. Demuestre que en algún momento, durante la carrera, tienen la misma velocidad.

8. Calcular los límites siguientes utilizando la regla de l'Hopital

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$;

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$;

c) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$;

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x - 3\operatorname{sen} 2x}$;

e) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$;

f) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2+2}$;

g) $\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right]$;

h) $\lim_{x\to\pi/2} \frac{\ln(1+2\cos x)}{\cos x}$.

[1] Recordar que un punto (a, b) es de inflexión de la curva de ecuación $y = f(x)$ si: **1)** $b = f(a)$, o sea, (a, b) es un punto de la curva, y **2)** la abscisa a de dicho punto es un punto de inflexión de f

9. Obtener el desarrollo de Taylor de orden n en a de las funciones abajo:

a) $f(x) = \cos x, a = 0, n = 6;$

b) $f(x) = \cos x, a = \pi, n = 4;$

c) $f(x) = \ln x, a = 1, n = 4;$

d) $f(x) = \ln(1 + x^2), a = 0, n = 8;$

e) $f(x) = \sqrt{1 + x^3}, a = 0, n = 6;$

f) $f(x) = e^{\cos x}, a = 0, n = 4$

10. Sea $f(x) = \ln(x)$. Usando el polinomio de Taylor de orden 4 de $\ln(1 + x)$ en $a = 0$ estime el valor $f(1,2)$ y compare el valor obtenido con el resultado que arroja la calculadora.