

Ecuaciones Diferenciales

PRÁCTICA 4: TRANSFORMADA DE FOURIER

Ejercicio 1. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Demostrar las siguientes propiedades de la transformada de Fourier:

- (I) a) Si $g(x) = f(x)e^{2\pi i\alpha \cdot x}$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, entonces $\hat{g}(y) = \hat{f}(y - \alpha)$.
- b) Si $g(x) = f(x - \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, entonces $\hat{g}(y) = \hat{f}(y)e^{-2\pi i\alpha \cdot y}$.
- c) Si $g(x) = f(\frac{x}{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces $\hat{g}(y) = \lambda^n \hat{f}(\lambda y)$.
- d) Si $g(x) = -2\pi i x_k f(x)$ define una función en $L^1(\mathbb{R}^n)$, $k \in \{1, \dots, n\}$, entonces \hat{f} es derivable con respecto a y_k y $\partial_{y_k} \hat{f}(y) = \hat{g}(y)$.
- (II) Si f es radial entonces también lo es \hat{f} .
- (III) Si f tiene soporte compacto entonces \hat{f} es infinitamente diferenciable.
- (IV) La transformada de f está esencialmente acotada y $\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. Usar esto, junto con la densidad de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en $L^1(\mathbb{R}^n)$, para demostrar el lema de Riemann-Lebesgue: Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $\lim_{|y| \rightarrow \infty} \hat{f}(y) = 0$.
- (V) Si $n = 1$ y f sólo asume valores reales, entonces \hat{f} es real si y sólo si f es par.

Ejercicio 2. Hallar las transformadas de Fourier de las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= e^{-a|x|} & (a > 0), & & f_2(x) &= \exp(-ax^2) & (a > 0), \\ f_3(x) &= \chi_{[a,b]}(x) & (a, b \in \mathbb{R}), & & f_4(x) &= \frac{1}{a^2 + x^2} & (a \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

En todos los casos, el dominio de la función es \mathbb{R} .

Ejercicio 3. Probar que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces $\hat{f}(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Extender el resultado del anterior para $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y concluir que si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ es tal que $\hat{f} = \lambda f$ para algún $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ entonces λ es una raíz cuarta de la unidad.

Ejercicio 4. Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Probar que $f * f = f$ si y sólo si $f = 0$. ¿Qué sucede si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$?

Ejercicio 5.

1. Probar que si ϕ, ϕ' y ϕ'' pertenecen al conjunto

$$L^1(\mathbb{R}) \cap \left\{ g \in C(\mathbb{R}) : \lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) = 0 \right\},$$

entonces existe $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\hat{f} = \phi$.

2. Sea $K \subset \mathbb{R}$ compacto y sea $U \subset \mathbb{R}$ abierto tal que $K \subset U$. Probar que existe $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\hat{f}(y) = 1$ para todo $y \in K$ y $\hat{f}(y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R} - U$.
3. Probar que $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ es denso en el conjunto de funciones continuas que tienden a cero en el infinito.

Ejercicio 6. Utilizar el método de la transformada de Fourier para obtener una solución explícita del siguiente problema:

$$\Delta u = 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}, \quad u = f \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \times \{0\},$$

donde $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Sugerencia: Transformar Fourier en la variable x y pensar en las funciones f_1 y f_4 del Ejercicio 2.

Ejercicio 7. Utilizar el método de la transformada de Fourier para obtener una solución explícita de la siguiente ecuación:

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en } \mathbb{R}^n,$$

donde $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Sugerencia: Al momento de antitransformar, (i) usar que $\frac{1}{a} = \int_0^{+\infty} e^{-at} dt$, $a > 0$, (ii) hacer aparecer la función $\int_0^{+\infty} e^{-t} K(x, t) dx$ donde K es el núcleo del calor.

Ejercicio 8. Utilizar el método de la transformada de Fourier para obtener una solución explícita del siguiente problema para la ecuación de Schrödinger:

$$iu_t + \Delta u = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty), \quad u = g \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times \{0\},$$

donde $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Considerar la condición inicial en el sentido de L^2 .

Ejercicio 9. Considerar el siguiente problema de valores iniciales para la ecuación de ondas unidimensional:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = f, \quad u_t = g & \text{en } \mathbb{R} \times \{0\}, \end{cases}$$

donde $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Usar el método de la transformada de Fourier para deducir la solución:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x+t) + f(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Ejercicio 10. Sea $f \in L^1(0, \infty)$. Se definen la *transformada-coseno* de Fourier y la *transformada-seno* de Fourier de f como:

$$\mathcal{F}_c f(y) = \int_0^\infty f(x) \cos(2\pi xy) dx, \quad \mathcal{F}_s f(y) = \int_0^\infty f(x) \sin(2\pi xy) dx \quad y \in \mathbb{R},$$

respectivamente. Comprobar las siguientes propiedades:

1. Si se extiende f a \mathbb{R} como una función par \tilde{f} , entonces $\mathcal{F}_c f = \frac{1}{2} \mathcal{F} \tilde{f}$.
2. Si se extiende f a \mathbb{R} como una función impar \tilde{f} , entonces $\mathcal{F}_s f = -\frac{1}{2i} \mathcal{F} \tilde{f}$.

Buscar ejemplos de aplicación de estas transformadas a la resolución de ecuaciones diferenciales.