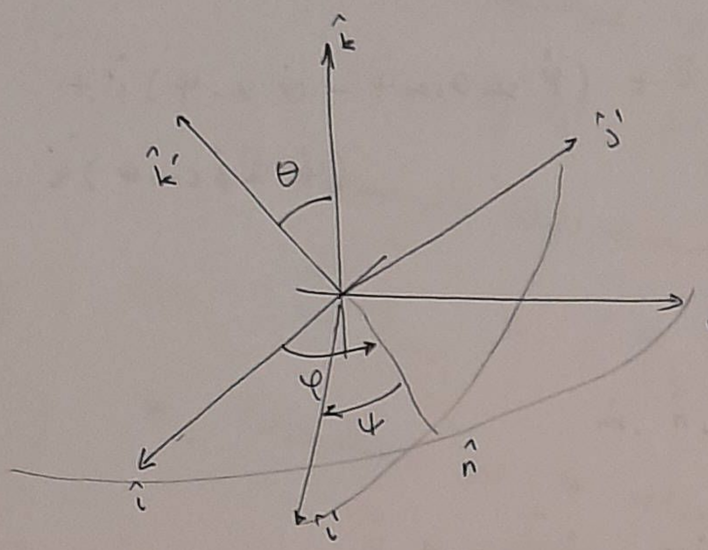
## 5.3 Angulos de Euler

$\hat{i}\hat{j}\hat{k}$ → Sistema fijo

$\hat{i}'\hat{j}'\hat{k}'$ → " soldado al rígido, o relativo

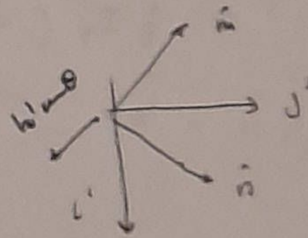



$\hat{k} \wedge \hat{k}' = \hat{n}$ (línea de los nodos) $\hat{n} \in \hat{i}-\hat{j}$

ángulo entre $\hat{k}$ y $\hat{k}'$ = $\theta$ (nutación)

Ángulo( $\hat{n}$ y $\hat{i}$ ) → $\varphi$ (precesión)

" ( $\hat{n}$ y $\hat{i}'$ ) → $\psi$ (giro propio)




¿Cómo pasamos de $\hat{i}\hat{j}\hat{k}$ a $\hat{i}'\hat{j}'\hat{k}'$ ?

1) Giro alrededor de $\hat{k}$ un ángulo $\varphi$ (precesión) antihorario
2) " " de $\hat{n}$ " " $\theta$ (nutación) "
3) " " de $\hat{k}'$ " " $\psi$ (giro propio) "

$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\hat{k} + \dot{\theta}\hat{n} + \dot{\psi}\hat{k}'$ Teorema de adición de las vel. angulares

$\hat{n} = \cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j}$

$\hat{k}' = \cos\theta\,\hat{k} + \sin\theta\,(\sin\varphi\,\hat{i} - \cos\varphi\,\hat{j})$

5.4

sistema fijo

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{k} + \dot{\psi}\cos\theta\,\hat{k} + (\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\psi)\hat{i} + (\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\psi - \dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\psi)\hat{j}$$

Sistema del rígido

$$\vec{\omega} = (\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\psi + \dot{\theta}\cos\psi)\hat{i}' + (\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\psi)\hat{j}' + (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\hat{k}'$$

$$\hat{k} = \cos\theta\,\hat{k}' + \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{m}$$

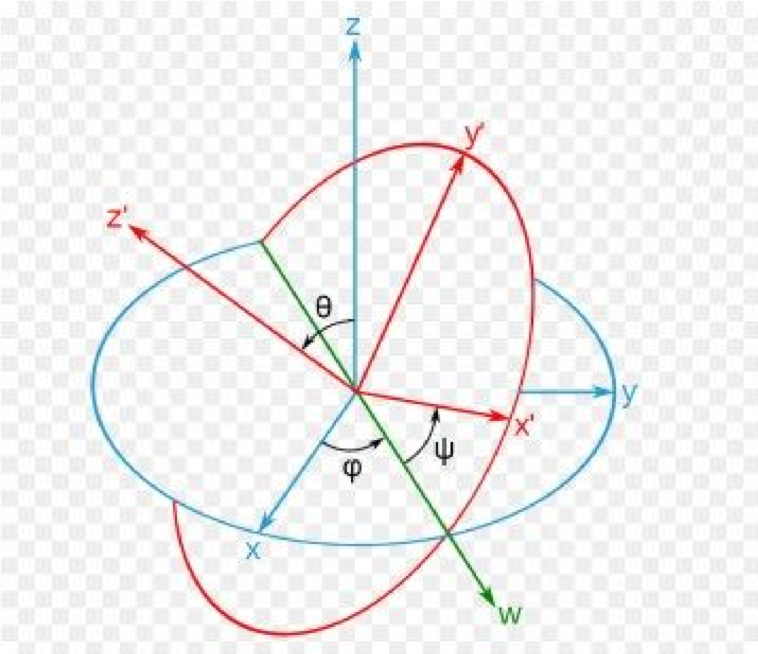
El sistema intermedio $\hat{k}', \hat{n}, \hat{m}$

$$\vec{\omega} = (\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\hat{k}' + \dot{\theta}\hat{n} + \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{m}$$

si $I_1 = I_2$ ($I_3$ corresponde a $\hat{k}'$)

$$T = \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 + \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\,\mathrm{sen}^2\theta)$$

# Angulos de Euler

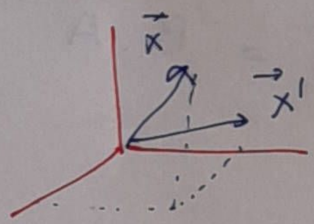



$$
\begin{aligned}
\omega_x &= \dot{\theta}\cos(\phi) + \dot{\psi}\,\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\phi) \\
\omega_y &= \dot{\theta}\,\mathrm{sen}(\phi) - \dot{\psi}\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi) \\
\omega_z &= \dot{\phi} + \dot{\psi}\cos(\theta)
\end{aligned}
$$

## * Transformaciones ortogonales

Def Decimos que una transformación lineal es <u>ortogonal</u> si verifica que

$$x_i \rightarrow \underbrace{x'_i = a_{ij} x_j}_{\text{utilizamos la conv. de Einstein}} \Rightarrow \underbrace{x'_i x'_i = x_i x_i}_{\text{Mantiene invariantes las longitudes}}$$




La condición $x'_i x'_i = x_i x_i$ puede escribirse como

$$a_{ij} x_j a_{ik} x_k = x_i x_i$$

$$\underbrace{a_{ij} a_{ik}}_{\substack{\text{tiene que ser } 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ si } i \neq j}} x_j x_k = x_i x_i \Rightarrow a_{ij} a_{ik} = \delta_{ij}$$

En forma matricial $(A)_{ij} = a_{ij} \Rightarrow A^t A = \mathbb{I}$

Es decir $A^t = A^{-1}$

Hay 2 interpretaciones

1 - Pasiva La transf. pasa de las comp. de un vector en un sistema a las comp. del mismo vector en otro sistema rotado.

2 - Activa Es el mismo sistema pero transformamos el vector

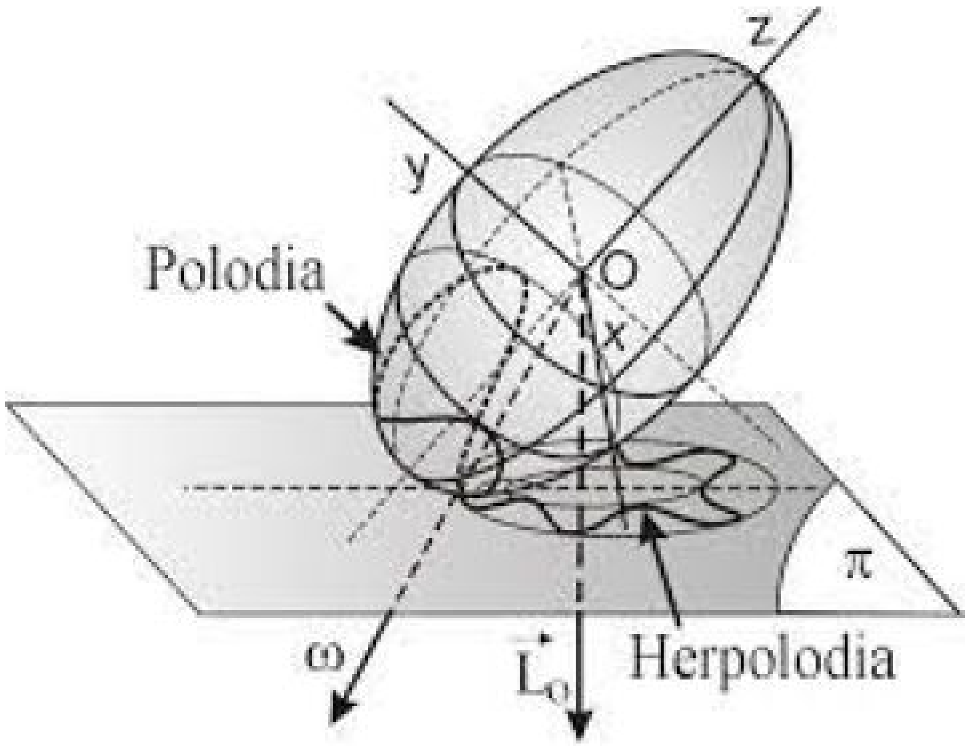



Fig. 2

Teorema 2  El elipsoide de inercia rueda s

deslizar sobre el plano P

$$\vec{v}_E = \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{\vec{v}_0} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge (E-O)}_{\vec{\omega} \,\parallel\, E-O} = 0$$

Al transcurrir el tiempo el pto contacto describe una "polodia" sobre el elipsoide y una "herpolodia" sobre el plano P

Propiedades de las transf. ortogonales

i. A y B son ortogonales $\Rightarrow$ A . B (composición)

también es ortogonal

$$x_i \to x'_i = a_{ij} x_j \to x''_k = b_{kl} x'_l$$

$$x''_k = b_{kl} x'_l = \underbrace{b_{kl} a_{lj}}_{c_{kj}} x_j$$

con $C = B . A$

$$C^t = (BA)^t = A^t B^t$$

$$C^t C = A^t \underbrace{B^t B}_{I} A = I$$

$A^t A = I \Rightarrow A A^t = I \Rightarrow$ si A es ortogonal la inversa también

) $\det(A^t A) = \det(I) = 1 \Rightarrow \det(A)^2 = 1$

$\Rightarrow \det(A) = \pm 1$

Obs si $\det A = -1 \Rightarrow$ no se conserva la paridad del espacio

Volvemos al caso no simétrico y buscamos obtener una representación geométrica similar

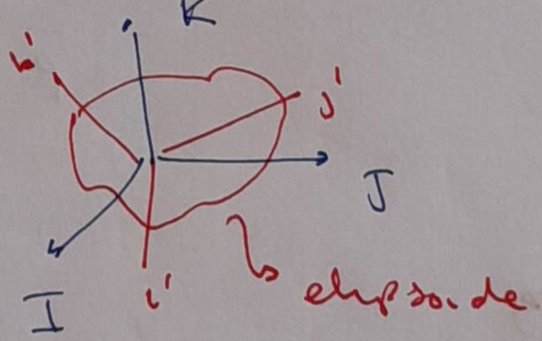
Definimos $OIJK$ sistema fijo
$Oxyz$ sistema solidario al rígido

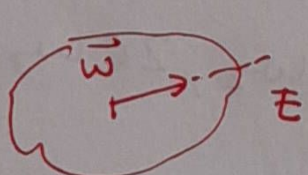
* Elipsoide de inercia $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$

con $(x, y, z)$ coordenadas en el sist. relativo

se puede escribir como $\boxed{\vec{x}\, \mathbb{I}_0\, \bar{x} = 1}$

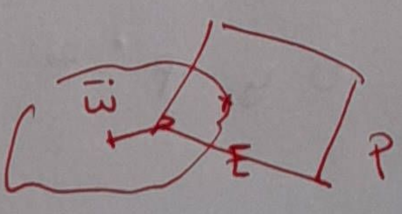
"pegado al cuerpo"




Defino "E" intersección de elipsoide y una recta colineal con $\vec{\omega}$

Teorema 1 El plano "p" tangente al elipsoide en E es fijo en el tiempo



Demos: Veremos que $p$ es perpendicular a una dirección fija

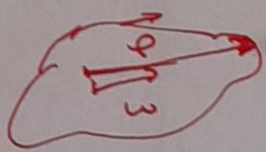
Sea $\vec{N} = \nabla f$ es la dirección de máx. crecimiento con $f(x,y,z)$ el elipsoide

$$\vec{N} = (2Ax, 2By, 2Cz)$$

Consideramos $\vec{\rho} = \dfrac{\vec{\omega}}{\sqrt{2T}}$ con $T = \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2 + Cz^2)$

$\Rightarrow \vec{\rho} \cdot \mathbb{I}_0 \vec{\rho} = 1 \Rightarrow \vec{\rho} \parallel \vec{\omega}$

$\vec{\rho}$ "termina en el elipsoide"



Calculo $\vec{N}\Big|_E = \dfrac{1}{\sqrt{2T}}(2A\omega_1, 2B\omega_2, 2C\omega_3)$

$= \sqrt{\dfrac{2}{T}}\, \vec{L}_0 \Rightarrow$ dirección fija

$\Rightarrow \vec{N}\Big|_E$ dirección fija

Además la distancia entre O y P es cte

$\vec{\rho} \cdot \dfrac{\vec{N}_E}{|N_E|} = \dfrac{\sqrt{2T}}{|\vec{L}_0|} = cte \Rightarrow$ Queda demostrado

Teorema de Euler. El desplazamiento general de un rígido con un punto fijo es una rotación alrededor de cierto eje.

Es equivalente a decir que una matriz ortogonal siempre tiene un valor propio $\lambda = 1$

En ese caso $\vec{x}' = A\vec{x} = \vec{x}$ para una cierta dirección $\vec{x}' = \vec{x}$

Se puede ver usando $A A^t = \mathbb{I}$

$$A A^t - A^t = \mathbb{I} - A^t$$

$$(A - \mathbb{I}) A^t = \mathbb{I} - A^t$$

calculo determinante ambos lados y $\det A = 1$

$$\det (A - \mathbb{I}) = \det (\mathbb{I} - A^t)$$

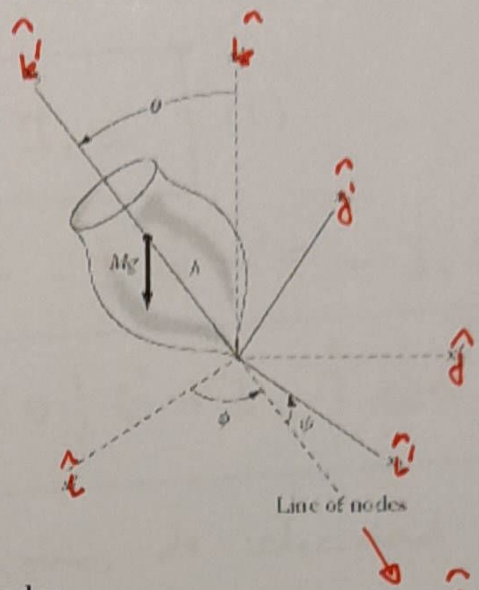
$$\det (A - \mathbb{I}) = \det (\mathbb{I} - A)$$

como $\det(-B) = (-1)^n \det(B)$

$$\Rightarrow \det (A - \mathbb{I}) = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ es v. p.}$$

# Trompo simétrico

Consideremos un cuerpo simétrico (masa $M$) con un punto fijo que pertenece al eje de simetría bajo la acción de la gravedad.




El centro de masas se ubica a una distancia $l$ del punto fijo O.

Denominamos los momentos de inercia como $(I_1, I_2, I_3)$ pero como el cuerpo es simétrico los dos primeros son iguales $I_1=I_2$

$$\mathbb{I}_0 = \begin{pmatrix} I_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & I_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & I_3 \end{pmatrix}$$

Como tenemos un punto fijo el sistema tiene TRES grados de libertad. $\varphi, \theta, \psi$

Elegimos los ángulos de Euler como coordenadas generalizadas.
Precesión, nutación, giro propio

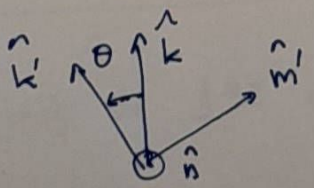
→ Línea de los nodos

Usando el teorema de adición de velocidades angulares, la velocidad angular se puede expresar como:

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\hat{k} + \dot{\psi}\,\hat{k}' + \dot{\theta}\,\hat{n}$$

Observamos que está expresada en una terna que no es ortonormal.

usamos $(\hat{n}, \hat{m}', \hat{k}')$




$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\hat{n} + \dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{m}' + (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\,\hat{k}'$$

Como es simétrico: $\quad T = \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{I_1}{2}\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2$

$$T = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\,\mathbb{I}\,\vec{\omega} \qquad V = mgh = Mgl\cos\theta$$

$$\boxed{L = T - V = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 - Mgl\cos\theta}$$

3 – ecuaciones diferenciales 2do orden
en los ángulos $\theta, \varphi, \psi$

¿Cómo las resolvemos?

* Tenemos 2. coord. ignorables $\varphi, \psi$ $\Rightarrow$

$P_\varphi = cte$ → El momento de $g$ es según $\hat{n}$

$P_\psi = cte$ → simetría del cuerpo

$$P_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \boxed{I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta) = I_1 a} \quad (1)$$

$$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\cos\theta + I_1 \dot{\varphi}\sin^2\theta = I_1 b$$

$$\boxed{(I_3\cos^2\theta + I_1\sin^2\theta)\dot{\varphi} + I_3\dot{\psi}\cos\theta = I_1 b}$$

$a, b$ son constantes con dimensiones de velocidad angular

* Además $T + V = cte = Energía$

$$\boxed{\frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 + Mgl\cos\theta = E} \quad (3)$$

(1), (2), (3) son ec. dif de 1er orden

$$I_3 \dot{\psi} = I_1 a - I_3 \dot{\varphi} \cos\theta$$

$$(I_3 \cos^2\theta + I_1 \sin^2\theta)\dot{\varphi} + (I_1 a - I_3 \dot{\varphi} \cancel{\cos\theta})\cos\theta = I_1 b$$

$$I_1 \sin^2\theta \, \dot{\varphi} + I_1 a \cos\theta = I_1 b$$

$$\boxed{\dot{\varphi} = \frac{b - a\cos\theta}{\sin^2\theta}}$$

$\sin\theta \neq 0$. $\theta \neq 0$
$\theta \neq \pi$

otro lado

$$\dot{\psi} = I_1 a - I_3 \cos\theta \left(\frac{b - a\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)$$

$$\boxed{= \frac{I_1}{I_3} a - \frac{(b - a\cos\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta}}$$

Logramos despejar $\dot{\varphi}, \dot{\psi}$ en función de $\theta$

uso la energía

$$= \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{I_1}{2}\frac{(b - a\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} + \frac{I_3}{2}\left(\frac{I_1 a}{I_3}\right)^2 + Mgl\cos\theta$$

$$\frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + \underbrace{\frac{I_1}{2}\frac{(b - a\cos\theta)}{\sin^2\theta} + Mgl\cos\theta}_{V_{ef}(\theta)} = \underbrace{E - \frac{I_1^2 a^2}{I_3 \, 2}}_{E'}$$

Cambio de variables $u = \cos\theta$ $\quad \dot{u} = -\sin\theta\,\dot{\theta}$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{u}}{-\sin\theta} = \frac{-\dot{u}}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{I_1}{2}\frac{\dot{u}^2}{1-u^2} + \frac{I_1}{2}\frac{b-au}{1-u^2} + Mglu = E'$$

$$\alpha = \frac{2E'}{I_1} \qquad \beta = \frac{2Mgl}{I_1}$$

$$\boxed{\frac{\dot{u}^2}{1-u^2} + \frac{(b-au)^2}{1-u^2} + \beta u = \alpha}$$

$\beta \rightarrow$ depende solo de la forma y masa.

$\left.\begin{matrix}\alpha\\ a\\ b\end{matrix}\right\}$ dependen de las c.i.

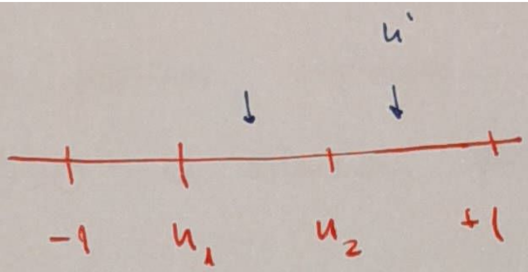
$$\dot{u}^2 + (b-au)^2 + \beta u(1-u^2) = \alpha(1-u^2)$$

$$\boxed{\dot{u}^2 = (\alpha-\beta u)(1-u^2) - (b-au)^2}$$

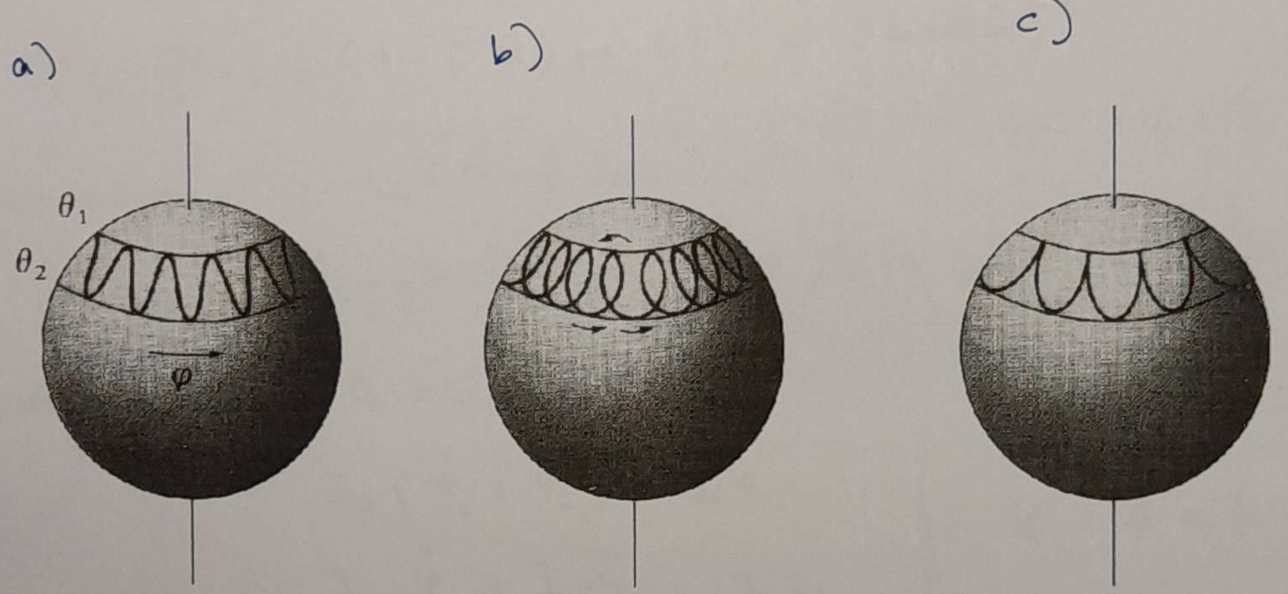
se podría integrar directamente. $\quad u = \frac{du}{dt} \Rightarrow$

$$\int \frac{du}{(\;)} = \int dt$$

si logramos resolverlo vamos a las ec. para $\dot{\varphi}(\cos\theta)$, $\dot{\psi}(\cos\theta)$ y tenemos el problema resuelto




Distinguimos 3 casos según




| a) | b) | c) |
|---|---|---|
| Si $u' > u_2$ | $u' \in (u_1, u_2)$ | $u' = u_1$ |
| $\dot{\varphi}$ tiene siempre el mismo signo | $\dot{\varphi}$ cambia de signo | $\dot{\varphi} = 0$ en $u'$ |
| | $\langle \varphi \rangle \neq 0$ | La precesión se detiene en $u_1$ |
| Precesa siempre para el mismo lado | Precesión cambia de signo pero en valor medio "avanza" | |

* El caso c) no es raro, si elegimos

(un giro propio, sin precesión ni nutación)

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\theta}_0 = 0 \\ \theta_0 = \theta_0 \\ \dot{\varphi}_0 = 0 \\ \dot{\psi}_0 \neq 0 \end{array}\right\} \quad a = \frac{I_3}{I_1}\dot{\psi}_0 \Rightarrow b = \frac{I_3}{I_1}\dot{\psi}_0 \cos\theta_0$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \cos\theta_0 \Rightarrow u_1 = u_2 = u' = \frac{b}{a} \Rightarrow \text{caso c)}$$

$$\left.\begin{array}{l} E' = Mgl\cos\theta_0 \\ \alpha = \frac{2E'}{I_1} \quad \beta = \frac{2Mgl}{I_1} \end{array}\right\} \alpha = \beta u_0$$

Como los términos cinéticos son $\geq 0 \Rightarrow Mgl\cos\theta$ debe disminuir $\Rightarrow$ "cae" y precesa

Vamos a tratar de tener una ~~?~~ idea mas clara del problema usando la ec. dif.

$$\dot{u}^2 = f(u) = (\alpha - \beta u)(1-u^2) - (b - au)^2$$

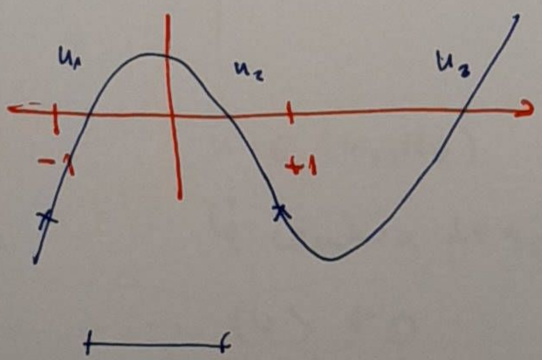
Nos interesa $f(u) \geq 0$ y $|u| \leq 1$ $(u = \cos\theta)$

* $f(\pm 1) = -(b \mp a)^2 < 0$ excepto $b = \pm a$
$f(\pm 1) = 0$

↓

corresponde con las posiciones verticales

* $f(\pm\infty) = \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$ → debe existir una raiz $> 1$




$u_1, u_2$ → puntos de retroceso

↳ El mov. se da en $u_1 \leq u(t) \leq u_2$

* lo unico "que hace" $u(t)$ es "ir y volver" entre $u_1$ y $u_2$

* Para ver $\varphi, \psi$ usamos

$$\dot{\varphi} = \frac{b - au}{1-u^2}$$ ⇒ el numerador tiene raiz $u' = \frac{b}{a}$

$$\dot{\psi} = \frac{I_1}{I_3} a - \frac{(b-au)u}{1-u^2}$$

## * Estabilidad de la posición vertical

La posición con $\theta = 0$ es solución pero no siempre es estable

Tomamos condición inicial $\theta_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = 0$

$$\dot{u}^2 = f(u) = (\alpha - \beta u)(1-u^2) - (b - a u)^2$$

Tenemos
$$I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta) = I_1 a$$
$$(I_3 \cos^2\theta + I_1 \sin^2\theta)\dot{\varphi} + I_3 \dot{\psi}\cos\theta = I_1 b$$

$\cos\theta_0 = 1$ $\quad \sin\theta_0 = 0$

$$\left.\begin{aligned} I_3(\dot{\psi}_0 + \dot{\varphi}_0) &= I_1 a \\ I_3\dot{\varphi}_0 + I_3\dot{\psi}_0 &= I_1 b \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = b$$

Energía
$$\frac{I_3}{2}(\dot{\psi}_0 + \dot{\varphi}_0)^2 + Mgl = E$$

$$E' = E - \frac{I_1^2 a^2}{2 I_3} \qquad \text{Como } \alpha = \frac{2E'}{I_1}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2}{I_1} Mgl \qquad \beta = \frac{2Mgl}{I_1} \qquad \boxed{\alpha = \beta}$$

Vuelvo al polinomio

$$\dot{u} = \alpha(1-u)(1-u^2) - a^2(1-u)^2$$
$$= (1-u)\left[\alpha(1-u^2) - a^2(1-u)\right]$$
$$= (1-u)^2\underbrace{\left[\alpha(1+u) - a^2\right]} \Rightarrow u = 1 \text{ raíz doble}$$

$$\alpha(1+u_3) - a^2 = 0 \Rightarrow u_3 = \frac{a^2}{\alpha} - 1$$

Tenemos dos casos $\quad u_3 > 1$

$\quad u_3 < 1$

Como A es real se puede ver que $|\lambda| = 1$

para todos los v.p.

$$\vec{x}' = A\vec{x}'$$

Complejo conjugado $\vec{x}'^* = A^* \vec{x}^* = A\vec{x}^*$

$$\vec{x}' \cdot \vec{x}'^* = \vec{x}\, \underbrace{A^t A}_{I}\, \vec{x}^* = \vec{x} \cdot \vec{x}^*$$

$$\vec{x}' \, \vec{x}'^* = \lambda \vec{x} \, \lambda^* \vec{x}^* = \lambda \lambda^* \, \vec{x} \cdot \vec{x}^*$$

$$\Rightarrow \lambda \lambda^* = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1$$

En resumen tenemos 3. v.p. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

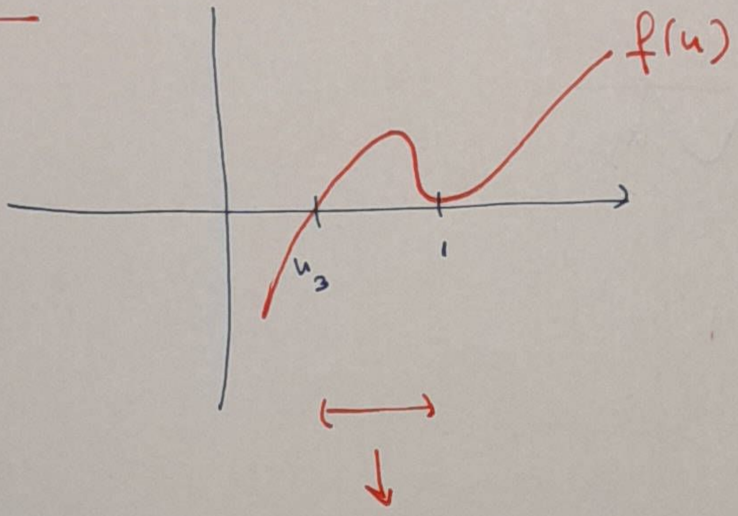
* $\lambda_1 . \lambda_2 . \lambda_3 = 1$ (el producto es el det)

* Sabemos que uno de ellos es $\lambda_3 = 1$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2^* = e^{i\phi}$$

$$\text{tr } A = \sum_i \lambda_i = e^{i\phi} + e^{-i\phi} + 1 = 1 + 2\cos\phi$$

$u_3 < 1$:



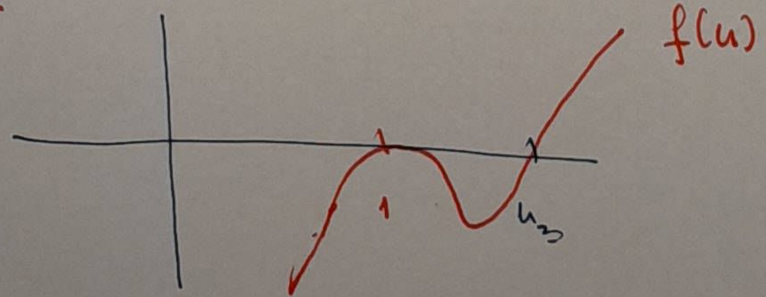

rango posible de $u(t)$ $\Rightarrow$

movimiento inestable

$$\frac{a^2}{\alpha} - 1 < 1 \Rightarrow \boxed{\frac{a^2}{\alpha} < 2}$$

$u_3 > 1$:

$\frac{a^2}{\alpha} > 2$




El valor crítico es $\frac{a^2}{\alpha} = 2$

Si $\omega_z = \dot{\varphi}_0 + \dot{\psi}_0 \Rightarrow a = \frac{I_3}{I_1}\omega_z$

$$\frac{a^2}{\alpha} = \frac{\left(\frac{I_3}{I_1}\right)^2 \omega_z^2}{2Mgl/I_1} = \frac{I_3^2 \omega_z^2}{2MglI_1}$$

$$\boxed{\omega_z > \frac{4mglI_1}{I_3^2}}$$

## 5.4 Ecuaciones de movimiento de un rígido.

Como corolario del T. de Euler podemos decir que el desplazamiento general de un rígido es una traslación más una rotación (T. de Chasles

Estudiamos por separado la traslación más la rotación.

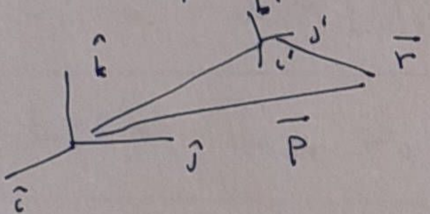
Si elegimos el centro de masas el momento angular y la energía cinética se desdoblan naturalmente, por ej.

$$T = \frac{m}{2} v_G^2 + T'(\phi, \theta, \psi)$$

Buscaremos expresiones para $\vec{L}$ y $T$ usando

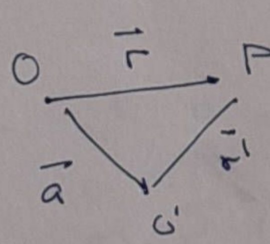
$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{abs} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{rel} + \vec{\omega} \wedge$$

* Probaremos que la velocidad angular no depende del pto elegido




$$d\vec{P} = d\vec{R} + d\vec{\phi} \wedge \vec{r} \qquad \text{con} \quad d\vec{\phi} = \hat{n}\, d\phi$$

$$\Rightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$




$$\vec{a} + \vec{r}' = \vec{r}$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \underbrace{\vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{a}}_{\vec{v}_0'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{0'} + \vec{\omega}' \wedge \vec{r}' =$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \vec{\omega}'$$

* Podemos hablar de "la" velocidad angular del rígido.

* Momento angular

El momento angular de un rígido con respecto a un pto. fijo es:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \, \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i \quad , \text{ usando } \vec{v}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i \Rightarrow$$

$$\vec{L} = \sum_i m_i \, \vec{r}_i \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i)$$

$$= \sum_i m_i \left[ \vec{\omega} \, r_i^2 - \vec{r}_i \, (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \right]$$

La componente $i$ está dada por

$$L_i = \sum m \left[ \omega_i \, r_j r_j - r_i \, \omega_j r_j \right]$$

$$L_i = \sum m \left[ \omega_k \, \delta_{ik} \, r_j r_j - r_i \omega_j r_j \right]$$

$$L_i = \sum m \left[ r_j r_j \, \delta_{ik} - r_k \, r_i \right] \omega_k \Rightarrow$$

$$\boxed{L_i = \mathbb{I}_{ik} \, \omega_k}$$

con $\mathbb{I}_{ik} = \sum_m m \left[ r_j r_j \, \delta_{ik} - r_k r_i \right]$ $\boxed{\text{Tensor de inercia.}}$

Para un medio continuo $\mathbb{I}_{ik} = \int \rho \, dv \left[ \delta_{ik} \, r^2 - r_i r_k \right]$

Obs si O no es G o no está fijo

$$L_0 = \sum (P_i - O) \wedge m_i \dot{\vec{r}}_i \quad y \quad \vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (P - O)$$

$$\boxed{L_0 = \mathbb{I}_0 \vec{\omega} + M \, (G - O) \wedge \vec{v}_0}$$

$$\mathbb{I}_{ij} = \begin{bmatrix} \sum m(y^2+z^2) & -\sum m\,xy & -\sum m\,xz \\ & \sum m(x^2+z^2) & -\sum m\,zy \\ & & \sum m(x^2+y^2) \end{bmatrix}$$

lo mismo

$\mathbb{I}_{ij} \rightarrow$ no diagonales son productos de inercia

$\mathbb{I}_{ii} \rightarrow$ diag. son momentos de inercia

* Es aditivo

* $\mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2 \geq \mathbb{I}_3$ (si es plano $\mathbb{I}_3 = \mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2$)

* Se puede diagonalizar

* Teor. de Ejes paralelos o Steiner

$$\mathbb{I}'_{ij} = \mathbb{I}_{ij} + M\left(a^2 \delta_{ij} - a_{ij}\right)$$

Energía cinética

Sea $T = \frac{1}{2} \sum m v^2$ donde la suma es sobre las partícu

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$$T = \frac{1}{2} M v_0^2 + \vec{v}_0 \cdot \vec{\omega} \wedge \left( \sum m \vec{r} \right) + \underbrace{\frac{1}{2} \sum m (\vec{\omega} \wedge}_{T_{rot}}$$

Usamos $(\vec{\omega} \wedge \vec{r})^2 = \omega^2 r^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2$

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum m \left[ \omega_i \omega_i r_j r_j - \omega_i r_j \omega_j r_i \right]$$

$$\frac{1}{2} \underbrace{\sum m \left[ \delta_{ik} r_j r_j - r_i r_k \right]}_{\mathbb{I}_{ik}} \omega_i \omega_k$$

$$\boxed{T_{rot} = \frac{1}{2} \omega_i \mathbb{I}_{0\,ik} \omega_k}$$

$$T = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \mathbb{I}_G \vec{\omega} + M \vec{v}_0 \cdot \vec{\omega} \wedge (G - O)$$

# Ecuaciones de Euler

Movimiento de un rígido con un pto. fijo

$$\dot{\vec{L}}_0 = \vec{M}_0^{(ext)}$$

con $\mathbb{I}_0 = \begin{pmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{pmatrix}$ y $\vec{L}_0 = \mathbb{I}_0 \vec{\omega}$

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_0) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{rel} \mathbb{I}_0 \vec{\omega} + \vec{\omega} \wedge \mathbb{I}_0 \vec{\omega}$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$M_0^{(ext)} = \mathbb{I}_0 \dot{\omega} + \vec{\omega} \wedge \mathbb{I}_0 \vec{\omega}$$

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= A\dot{\omega}_1 + (C-B)\,\omega_2\omega_3 \\ M_2 &= B\dot{\omega}_2 + (A-C)\,\omega_1\omega_3 \\ M_3 &= C\dot{\omega}_3 + (B-A)\,\omega_1\omega_2 \end{aligned}\right\} \text{Sistema 3 ec.}$$

En principio $\vec{\omega}(\varphi, \psi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta})$

$\vec{M}(\varphi, \theta, \psi)$

Difícil de resolver

Movimiento de Poinsot $\vec{M}_0^{(ext)} = 0$

* En este caso $E = cte$ , $|\vec{L}| = cte$

$$\frac{A}{2}\omega_1^2 + \frac{B}{2}\omega_2^2 + \frac{C}{2}\omega_3^2 = E$$

$$(A\omega_1)^2 + (B\omega_2)^2 + (C\omega_3)^2 = L^2$$

Igual sigue siendo difícil de resolver

* Rígido de revolución $A = B$

$$A\dot{\omega}_1 + (C-A)\,\omega_2\omega_3 = 0$$
$$A\dot{\omega}_2 + (A-C)\,\omega_1\omega_3 = 0$$
$$C\dot{\omega}_3 = 0 \Rightarrow \omega_3 = cte$$

Derivo (1) $A\ddot{\omega}_1 + (C-A)\,\dot{\omega}_2\,\omega_3 = 0$

Sustituyo (2) $\ddot{\omega}_1 + \underbrace{\frac{(C-A)^2}{A^2}\omega_3^2}_{\Omega^2}\,\omega_1 = 0$

$\omega_1 = \omega_{10}\cos(\Omega t + \alpha)$

$\omega_2 = \omega_{20}\sin(\Omega t + \alpha)$

y $\omega_1^2 + \omega_2^2 = cte$