Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo diferencial e integral I
Primer semestre 2024

Práctico 5: Integral de Riemann

1. Utilizando la propiedad del valor medio para integrales estime por defecto y por exceso las siguientes integrales:

a) $\int_1^4 \sqrt{x}\, dx$;

b) $\int_0^2 \frac{dx}{1+x^2}\, dx$;

2. Utilizando la fórmula de Barrow calcule $\int_a^b f(x)dx$ en los siguientes casos:

a) $f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x, a = 0, b = \pi/2$;

b) $f(x) = 1 + \tan^2 x, a = 0, b = \pi/3$;

c) $f(x) = \frac{1}{1+x}, a = 0, b = 1$;

d) $f(x) = 2xe^{x^2}, a = -1, b = 0$;

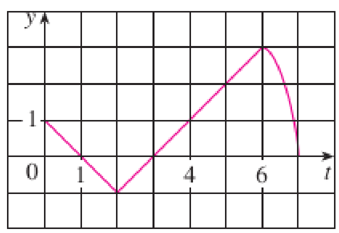
e) $f(x) = x^3, a = -1, b = 1$;

f) $f(x) = (2x + 1)^3, a = -1/2, b = 0$;

g) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, a = 0, b = \sqrt{3}$;

h) $f(x) = 1 + x^2 - e^x, a = 0, b = 1$.

3. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.



a) Evalúe $g(x)$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y 6.

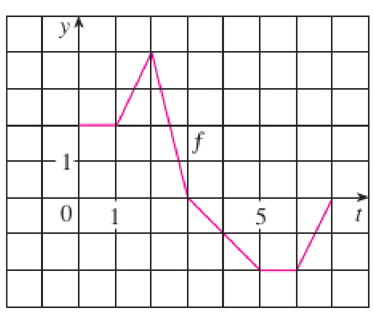
b) Calcule $g'(1), g'(4)$ y $g'(6)$

c) Estime $g(7)$.

d) Determine los extremos relativos y absolutos de g.

e) Trace una gráfica aproximada de g.

4. Estudie el crecimiento y la concavidad de la función $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.



a) Estudie el crecimiento de la función g.

b) Estudie la concavidad de la función g.

5. Calcule la derivada de las siguientes funciones definidas por integrales:

a) $g(s) = \int_1^s \cos t\, dt$,

b) $g(x) = \int_x^1 \cos t\, dt$,

c) $g(x) = \int_0^{x^2} \cos t\, dt$,

d) $g(y) = \int_1^{e^y} \ln t\, dt$,

e) $g(\theta) = \int_{\operatorname{sen}\theta}^1 \sqrt{1+t^2}dt$,

f) $g(x) = \int_{x^2}^{1+2x} \frac{1}{1+t}\, dt$.

6. Considere la función $f(x) = x/\sqrt{1+2x}$.

a) Encuentre A y B para que $(A+Bx)\sqrt{1+2x}$ sea primitiva de f (solución: $A = -1/3, B = 1/3$).

b) Calcule $\int_0^2 f(x)\, dx$.

7. La función velocidad (en metros por segundo) para una partícula que se mueve a lo largo de una recta es $v(t) = t^2 - 2t - 8$, $0 \leq t \leq 6$.

a) ¿Qué representa la funcuón $x(t) = \int_0^t v(s)\, dt$?

b) Encuentre el desplazamiento de la partícula en el instante $t = 6$, admitiendo que la misma parte del origen.

c) Calcular la distancia recorrida por la partícula durante el intervalo de tiempo dado.

8. Si se fuga aceite de un tanque con una rapidez de $r(t)$ litros por minuto en el instante t, ¿qué representa $\int_0^x r(t)\, dt$?

Ejercicios opcionales

9. Usando el ejercicio 4 como inspiración, calcular una primitiva de $\frac{x}{\sqrt{a+bx}}$, donde ahora a y b son arbitrarios (solución: $A = -\frac{4a}{3b^2}, B = \frac{2}{3b}$).

10. La **función error** de Gauss es

$$\mathbf{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

a) Demuestre que $\int_a^b e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}(\mathbf{erf}(b) - \mathbf{erf}(a))$.

b) Si $h(x) = e^{x^2}\mathbf{erf}(x)$, demuestre que $h'(x) = 2xh(x) + 2/\sqrt{\pi}$.