Ecuaciones Diferenciales

Práctico 5; Ecuación del calor

Ejercicio 1. Sea $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $u : \mathbb{R} \times (0, \infty)$ la función definida por:

$$u(x,t) = v(x^2/t).$$

1. Verificar que u satisface la ecuación del calor en $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ si y sólo si v es solución de la siguiente ecuación diferencial ordinaria:
$$4zv''(z) + (2 + z)v'(z) = 0 \qquad z > 0,$$
y que la solución general de esta última ecuación está dada por:
$$v(z) = C_1 \int_0^z e^{-s/4} s^{-1/2} ds + C_2 \qquad z > 0 \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$
2. Usar el ítem 1 para deducir la solución fundamental de la ecuación del calor en $\mathbb{R} \times (0, \infty)$.
Sugerencia: Verificar primero que si u es una solución *suficientemente* derivable de la ecuación del calor en $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ entonces $\partial_x u$ también lo es.

Ejercicio 2. Sea $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $u : \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ la función definida por:

$$u(x,t) = t^{-\alpha} v(xt^{-\beta}),$$

para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dados.

1. Verificar que u satisface la ecuación del calor en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ si y sólo si v es solución de la siguiente ecuación:
$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)} y \cdot \nabla v(y) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v(y) = 0 \qquad y = t^{-\beta} x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0. \tag{1}$$
2. Verificar que si $\beta = 1/2$ entonces la ecuación (1) se reduce a:
$$\alpha v(y) + \frac{1}{2} y \cdot \nabla v(y) + \Delta v(y) = 0 \qquad y \in \mathbb{R}^n,$$
y que si una función radial v, digamos $v(y) = w(|y|)$ para $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es solución de esta ecuación entonces w satisface:
$$\alpha w(r) + \frac{1}{2} r w'(r) + w''(r) + \frac{n-1}{r} w'(r) = 0 \qquad r > 0.$$
3. Deducir la solución fundamental de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ a partir de considerar $\alpha = n/2$ y $\beta = 1/2$.

Ejercicio 3.

1. Hallar todas las soluciones u de la ecuación del calor en $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ que satisfacen:
$$u(x,t) = u(\lambda x, \lambda^2 t) \qquad \forall\, x, \lambda \in \mathbb{R},\ t > 0.$$
2. Repetir el ítem 1 para la ecuación no lineal $\partial_x (K(u) \partial_x u) = \partial_t u$, donde $K \in C^1(\mathbb{R})$.
3. Verificar que si u es solución de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ entonces la función u_λ definida por $u_\lambda(x,t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$ también lo es, cualquiera sea $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4. Sea u_i una solución de la ecuación del calor en $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ que satisface la condición inicial $u_i(\,\cdot\,, 0) = \varphi_i$, donde φ_i esta dado e $i = 1, \ldots, n$. Probar que la función $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$u(x,t) = u_1(x_1,t)\, u_2(x_2,t) \ldots u_n(x_n,t),$$

es solución de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ y satisface $u(\,\cdot\,, 0) = \varphi$, donde $\varphi(x) = \varphi_1(x_1)\, \varphi_2(x_2) \ldots \varphi_n(x_n)$ para $x \in \mathbb{R}^n$.

Ejercicio 5 (Ecuaciones que se pueden reducir a la ecuación del calor)**.** Determinar explícitamente el cambio de variables sugerido en cada ítem para obtener que u es solución de la ecuación dada si y sólo si v es solución de la ecuación del calor:

1. $u_t(x,t) = a(t)\Delta u(x,t)$ en $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, $a : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ continua y positiva.
   Cambio de variables: $t = \phi(\tau)$, $v(x,\tau) = u(x,\phi(\tau))$.

2. $u_t(x,t) = \Delta u(x,t) + b(t)\cdot\nabla u(x,t)$ en $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, $b : (0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ continua.
   Cambio de variables: $x = \psi(y,t)$, $v(y,t) = u(\psi(y,t),t)$.

3. $u_t(x,t) + c(t)u(x,t) = \Delta u(x,t)$ en $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, $c : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ continua.
   Cambio de variables: $v(x,t) = u(x,t)\varphi(t)$.

Ejercicio 6 (Principio de Duhamel)**.** Para $s > 0$, sea $v(\,\cdot\,; s) : [0,\ell] \times [s,\infty) \to \mathbb{R}$ solución del problema:

$$\begin{cases} v_t(x,t;s) - v_{xx}(x,t;s) = 0 & 0 < x < \ell,\ t > s, \\ v(0,t;s) = v(\ell,t;s) = 0 & t > s, \\ v(x,s;s) = g(x,s) & 0 < x < \ell. \end{cases}$$

Probar que la función $u : [0,\ell] \times [s,\infty)$ definida por:

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t;s)\,ds,$$

es solución del siguiente problema para la ecuación del calor no homogénea:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = g(x,t) & 0 < x < \ell,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 & t > 0, \\ u(x,0) = 0 & 0 < x < \ell. \end{cases}$$

Ejercicio 7. Deducir la solución dada para cada uno de los siguientes problemas:

1. $u_t - u_{xx} = 0 \quad x > 0,\ t > 0, \qquad u(x,0) = 0 \quad x > 0, \qquad u(0,t) = h(t) \quad t > 0,$
   donde $h(0) = 0$.
   Solución: $u(x,t) = \dfrac{x}{\sqrt{4\pi}} \displaystyle\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/2}} e^{\frac{-x^2}{4(t-s)}} h(s)ds.$

   Sugerencia: Definir $v(x,t) = u(x,t) - h(t)$ y extender a $v(\cdot,t)$ por imparidad.

2. $u_t - u_{xx} = 0 \quad x > 0,\ t > 0, \qquad u(x,0) = f(x) \quad x > 0, \qquad u_x(0,t) = 0 \quad t > 0.$
   Solución: $u(x,t) = \displaystyle\int_0^\infty N(x,\xi,t)f(\xi)d\xi,$
   donde $N(x,\xi,t) = \Phi(x-\xi,t) + \Phi(x+\xi,t)$ y Φ es la solución fundamental de la ecuación del calor.

   Sugerencia: Extender f por paridad a $-\infty < x < 0$ y resolver el problema de valores iniciales para la f extendida.

Definición: Para $T > 0$ y $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, definimos:

$$U_T = U \times (0,T], \qquad \partial_p U_T = \overline{U_T} \setminus U_T.$$

Al conjunto $\partial_p U_T$ se lo denomina “frontera parabólica” de U_T.

Ejercicio 8 (Principio débil del máximo para subsoluciones de la ecuación del calor)**.** Se dice que $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ es una *subsolución* de la ecuación del calor en U_T si:

$$u_t - \Delta u \leq 0 \qquad \text{en} \quad U_T.$$

Demostrar que si u es una subsolución de la ecuación del calor en U_T entonces $\max_{\overline{U_T}} u = \max_{\partial_p U_T} u$.

Ejercicio 9. Sea $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ solución del problema:

$$u_t - \Delta u = f \quad \text{en} \quad U_T, \qquad u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial_p U_T,$$

donde f no depende de t. Probar que si $f \leq 0$, entonces $u_t \leq 0$.

Sugerencia: Definir $w(x,t) = u(x, t+\varepsilon) - u(x,t)$, calcular $w_t - \Delta w$ y aplicar el principio del máximo.

Ejercicio 10 (*)**.** Sea $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ una solución de la ecuación del calor en U_T y sea $K \subset \overline{U_T} \setminus \partial_p U_T$ compacto. Probar que existe $C > 0$ constante que depende de $dist(K, \partial_p U_T)$ tal que:

$$\sup_K |\nabla_x u| \leq C \sup_{U_T} |u|.$$

Sugerencia: Probar primero que si u es solución de la ecuación del calor en $C(0,0;2)$ entonces existe $C > 0$ constante tal que:

$$\sup_{C(0,0;1)} |\nabla_x u| \leq C \sup_{C(0,0;2)} |u|,$$

donde $C(x,t;r) = B_r(x) \times (t - r^2, t]$ para $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ y $r > 0$.

Ejercicio 11 (*)**.** Para $n \in \mathbb{N}$, sea $u_n \in C^{2,1}(U_T)$ una solución del siguiente problema:

$$\partial_t u_n - \Delta u_n = 0 \quad \text{en} \quad U_T, \qquad u_n = f_n \quad \text{sobre} \quad \partial_p U_T.$$

Probar que si $f_n \to f$ uniformemente en $\partial_p U_T$, entonces existe $u \in C^{2,1}(U_T)$ tal que $u_n \to u$ uniformemente en U_T y u es solución de:

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{en} \quad U_T, \qquad u = f \quad \text{en} \quad \partial_p U_T.$$

Ejercicio 12.

1. Probar que si u es una solución acotada de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^{n+1}$ entonces u es constante. ¿Es cierto el resultado si eliminamos la hipótesis que u sea acotada?
2. Sea u una función Lipschitz continua que satisface la ecuación del calor en $\mathbb{R}^{n+1}$ y tal que $u = 0$ si $x_1 = 0$. Probar que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $u(x,t) = \alpha x_1$.

Ejercicio 13 (Principio del máximo para problemas parabólicos)**.** Sean $T > 0$ y $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Probar que si $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$ satisface:

$$u_t + \mathcal{L}u = 0 \quad \text{en } U_T,$$

entonces $\max_{\overline{U}_T} u = \max_{\partial_p U_T} u$, donde $\partial_t + \mathcal{L}$ es el operador *parabólico* definido por:

$$\partial_t u + \mathcal{L}u = \partial_t u - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \partial_{ij} u + \sum_{i=1}^n b_i(x,t) \partial_i u,$$

los coeficientes a_{ij}, b_i son continuos en U_T y la matriz $A = (a_{ij})$ es simétrica definida positiva para cada $(x,t) \in U_T$.