Práctico 6: Cinemática del rígido

1. (a) Pruebe que la multiplicación matricial es asociativa.
   (b) Demuestre que el producto de dos matrices ortogonales es ortogonal.
   (c) Pruebe que las matrices ortogonales forman un grupo con respecto a la multiplicación matricial.
   (d) Pruebe las siguientes propiedades de las matrices traspuesta y adjunta

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

   (e) Calcular el determinante de cualquier matriz ortogonal.
   (f) Sea una matriz M tal que

$$M = I + \Omega$$

   donde I es la identidad y los elementos de matriz de Ω son tales que $\omega_{ij} \ll 1$. ¿Qué condición debe satisfacer Ω para que M sea ortogonal?

2. Demuestre que la traza de una matriz es invariante respecto a las semejanzas. Pruebe tambien que la propiedad de antisimetría se conserva en las transformaciones ortogonales de semejanza, mientras que la hermiticidad se conserva en transformaciones de semejanza unitarias.

3. Demuestre que las componentes de la velocidad angular con respecto a un sistema espacial de ejes, en función de los ángulos de Euler, son:

$$\omega_x = \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\phi$$

$$\omega_y = \dot{\theta}\sin\phi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\phi$$

$$\omega_z = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi}$$

4. Halle las componentes de la velocidad angular en el sistema solidario al rígido en función de los ángulos de Euler.

5. Exprese la ligadura de rodadura de una esfera sobre un plano en términos de los ángulos de Euler. Demuestre que estas condiciones no son integrables, por lo que la ligadura es no holónoma.