Parcial 1 Una posible solución.

Ej 1 Probar que $f_n(x) = \frac{(x^2+1)}{3n-1}$ converge uniformemente en todo intervalo compacto de $\mathbb{R}$. ¿Qué pasa en todo $\mathbb{R}$?

Sea $I = [a,b]$ intervalo compacto. Notar que $f_n' = \frac{2x}{3n-1}$ con lo cual es creciente en $(0,+\infty)$ y decreciente en $(-\infty,0)$ $\Rightarrow$ tiene mínimo global en $x=0$. Entonces $\max_{x\in[a,b]} |f_n(x)| = \max \{ f_n(a), f_n(b) \}$

Como $f_n(a) = \frac{a^2+1}{3n-1} \longrightarrow 0$ y $f_n(b) = \frac{b^2+1}{3n-1} \longrightarrow 0$ obtenemos que

$\max_{x\in[a,b]} |f_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y por lo tanto $f_n \rightrightarrows 0$ en $[a,b]$.

Por otra parte $\forall n>0$ la función f_n es no acotada, con lo cual el $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \infty$ con lo cual $f_n \not\rightrightarrows 0$ en $\mathbb{R}$ (y 0 es el único candidato a límite posible)

$f: U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $d > m$ submersion con U abierto $\Rightarrow f(U)$ abierto.

Sea $y \in f(U) \Rightarrow y = f(x)$ con $x \in U$. Como $D_x f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ es submersión, el TFLS nos ~~dice~~ que $\exists$ V entorno de x en $\mathbb{R}^d$, W entorno de y en $\mathbb{R}^m$ tal que hay un difeo de V en un abierto del 0 en $\mathbb{R}^d$ $g: V \to \hat{V}$ con $g(x) = 0$ y tal que $f \circ g^{-1} : \hat{V} \to W$ es de la forma

$\left[(x_1, \dots, x_d) \longmapsto (x_1, \dots, x_m) \right]$ en particular, la imágen de un entorno de 0 por $f \circ g^{-1}$ (que como g es difeo es la imágen por f de un entorno de x) nos da un entorno de y. En particular, y está en el interior de $f(V) \subseteq f(U) \Rightarrow f(U)$ es abierto pues y era genérico.

b) $M \subseteq \mathbb{R}^d$ variedad de dim m y N variedad de dim n con $m \geq n$. Si M es compacta (sin borde) y N conexa $\Rightarrow$ toda submersion $f: M \to N$ es sobreyectiva.

La parte a) da que f es abierta, de hecho como f es submersión en todos sus puntos, si tomamos $y \in f(M)$ tq $y = f(x)$ podemos tomar parametrizaciones $\varphi_1 : U \subseteq \mathbb{R}^m \to M$ con $\varphi_1(0) = x$ y $\hat{f} := \varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1 : \hat{U} \to V$
$\varphi_2 : V \subseteq \mathbb{R}^n \to N$ con $\varphi_2(0) = y$

(donde $\hat{U} \subseteq U$ es entorno pequeño del 0 tq $f(\varphi_1(U)) \subseteq \varphi_2(V)$)

y se cumple que $D_0 \hat{f} = \underbrace{D_y \varphi_2^{-1}}_{\text{iso}} \circ \underbrace{D_x f}_{\text{sobre}} \circ \underbrace{D_0 \varphi_1}_{\text{iso}}$ es sobre

$\Rightarrow \hat{f}(\hat{U})$ es abierto y $\varphi_2(\hat{f}(\hat{U})) \subseteq f(M) \Rightarrow y$ es interior.

Por otro lado M es compacta y f es continua $\Rightarrow f(M)$ es un cerrado, con lo cual $f(M)$ es abierto y cerrado. Como $\underbrace{N \text{ es conexa}}_{\text{se puede ver usando curvas.}}$, $f(M)$ es todo N

c) No existen submersiones de S^d en $\mathbb{R}^k$. $\forall d, k > 0$.

S^d es compacta, $\mathbb{R}^k$ es conexa.

Si $d < k$ las dimensiones no dan para que el diferencial sea sobreyectivo.

Si $d \geq k$, podemos aplicar la parte anterior y usar que $f(S^d)$ tendría que ser compacto y por lo tanto no ser sobreyectiva. Una contradicción.

3) a) Mostrar que $SL_3(\mathbb{R})$ es variedad diferenciable

b) Mostrar que el tangente a la identidad son las matrices de ~~de~~ traza nula.

c) ¿Que pasa con $SL_d(\mathbb{R})$ con d arbitrario?

Voy a hacer directo para SL_d pues SL_3 es caso particular.

Miramos $\mathbb{R}^{d\times d} \simeq M_{d\times d}(\mathbb{R})$ y vamos a operar como matrices.

$\det : M_{d\times d}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable (es productos y sumas de las entradas...)

Si $A=(a_{ij})$ es una matriz cualquiera tal que $\det(A)\neq 0$

significa que $\exists$ al menos una permutación σ de $\{1,\dots,d\}$

de forma tal que $\prod_{j=1}^{d} a_{i\sigma(i)} \neq 0$.

Eso significa que todos los $a_{i\sigma(i)}$ son $\neq 0$.

Sea E la matriz que tiene todos 0 salvo la entrada $1\sigma(1)$ que tiene un 1

Entonces $\lim_{t\to 0} \frac{\det(A+tE)-\det(A)}{t} = (-1)^{sg(\sigma)}\prod_{j=1}^{d} a_{i\sigma(i)} \neq 0.$

↑ Esto es una derivada direccional de la función det $\Rightarrow$ el diferencial es sobreyectivo (para funciones a $\mathbb{R}$ alcanza una derivada direccional no nula)

$$T_{Id}SL_d = Ker(D_{Id}\det) = \operatorname{span}\left\{ M \,/\, \frac{\partial}{\partial t}\big(\det(Id+tM)\big)=0 \right\}$$

Mirando la cuenta del determinante se ve que alcanza que tenga traza nula (pues en cualquier otra contribución aparece t elevado a potencias mayores)