PRÁCTICO 5

Álgebra exterior.

1. Sean V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y ω una k-forma alternada. Probar que

   a) $\omega(..., v, ..., v, ...) = 0$.
   b) Si $\{v_1, ..., v_k\}$ es un conjunto LD, entonces $\omega(v_1, ..., v_k) = 0$.

2. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Probar que $\Lambda^1(V^*)$ es isomorfo a V^*. Hallar explícitamente una base de $\Lambda^1(\mathbb{R}^3)$.

3. Probar que si $\phi_1, \ldots, \phi_k \in V^*$ son linealmente independientes, entonces $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \ldots \wedge \phi_k \in \Lambda^k(V)$ es nula.

4. Sea V un espacio vectorial. Sean $\phi_1, \ldots, \phi_d \in V^*$ y $v_1, \ldots, v_d \in V$, mostrar que $(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_d)(v_1, \ldots, v_d) = \det(A)$ donde A es la matriz $d \times d$ cuyas entradas son $a_{ij} = \phi_i(v_j)$.

5. Sea V un espacio vectorial de dimensión n.

   a) Probar $\Lambda^n(V)$ es un espacio vectorial de dimensión 1.
   b) Probar que $\Lambda^k(V)$ es isomorfo a $\Lambda^k((\mathbb{R}^n))$
   c) Probar que $\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

6. Sea $A : V \to W$ una transformación lineal entre espacios vectoriales reales de dimensión finita. Recordar que el mapa <u>adjunto</u> de A, a saber A^* se define como como el mapa $A^* : W^* \to V^*$ dado por $(A^*\varphi)(v) = \varphi(Av)$, para todo $\varphi \in W^*$, y todo $v \in V$. De manera análoga, el adjunto se extiende a k-forma alternadas de la siguiente manera $A^* : \Lambda^k(W^*) \to \Lambda^k(V^*)$ dado por $(A^*T)(v_1, \ldots, v_k) = T(Av_1, \ldots, av_k)$, para $T \in \Lambda^k(W^*)$ y $v_i \in V$. Probar que si A

   a) Probar que el mapa adjunto está bien definido.
   b) Probar que si A y B son transformaciones lineales, donde tiene sentido la composición $A \circ B$, entonces los mapas adjuntos verifican $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$. Concluir que si $A : V \to W$ es una tranformación lineal invertible entonces A^* es invertible. ¿Quién es su inversa?
   c) Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal. Probar que $A^* \det = |A| \det$, donde $|A|$ es el determinante de la matriz A.
   d) Sea $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineal dada por $\Phi(x, y, z) = (x, y)$. Hallar $\Phi^* \det$, donde $\det \in \Lambda^2((\mathbb{R}^2)^*)$.

7. Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Probar:

   a) $|dx(u)|$ es la longitud de la proyección ortogonal de u sobre el eje x.
   b) $|dx \wedge dy(u, v)|$ es el área del paralelogramo generado por las proyecciones ortogonales de u y v sobre el plano xy.

c) $|dx \wedge dy \wedge dz(u, v, w)|$ es el volumen del paralelepípedo generado por u, v, w.

8. [1] Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciables, y ω, η formas diferenciales. Probar las siguientes propiedades.

   a) $f^*(dx_i) = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f_i}{\partial x_3}dx_3$, donde se usa la notación $x_1 = x$, $x_2 = y$ y $x_3 = z$.
   b) $f^*(\omega + \eta) = f^*(\omega) + f^*(\eta)$
   c) $f^*(h\omega) = (h \circ f)f^*(\omega)$
   d) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$
   e) $(g \circ f)^*(\eta) = f^*(g^*(\eta))$

9. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ y $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diferenciables, y ω, η formas diferenciales. Probar las siguientes propiedades.

   a) $f^*(dx^i) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x^j}dx^j$
   b) $f^*(\omega + \eta) = f^*(\omega) + f^*(\eta)$
   c) $f^*(h\omega) = (h \circ f)f^*(\omega)$
   d) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$
   e) $(g \circ f)^*(\eta) = f^*(g^*(\eta))$

10. Calcular la derivada exterior de las siguientes formas definidas en $\mathbb{R}^3$.

    a) $x^3y - \cos(z)e^{yx}$.
    b) $13xdx + y^2dy + xyzdz$.
    c) $z^2dx \wedge dy + (z^2 + 2y)dx \wedge dz$.

11. Una k-forma diferencial ω es *exacta* si existe una $(k-1)$-forma diferencial ν (llamada *potencial*) tal que $d\nu = \omega$. Probar que las siguientes formas son exactas encontrando un potencial en cada caso.

    a) $\omega = (6x^2y - 3xy^2)dx \wedge dy$ en $\mathbb{R}^2$.
    b) $\omega = -4xydx \wedge dy - 2xzdz \wedge dx + 2yzdy \wedge dz$ en $\mathbb{R}^3$.
    c) $\omega = 12x^2y^3z^4dx \wedge dy \wedge dz$ en $\mathbb{R}^3$.

12. Mostrar que $f^*(d\omega)) = d(f^*(\omega))$.

[1]Se sugiere volver al ejercicio más adelante para observar que las propiedades valen en dimensión arbitraria.