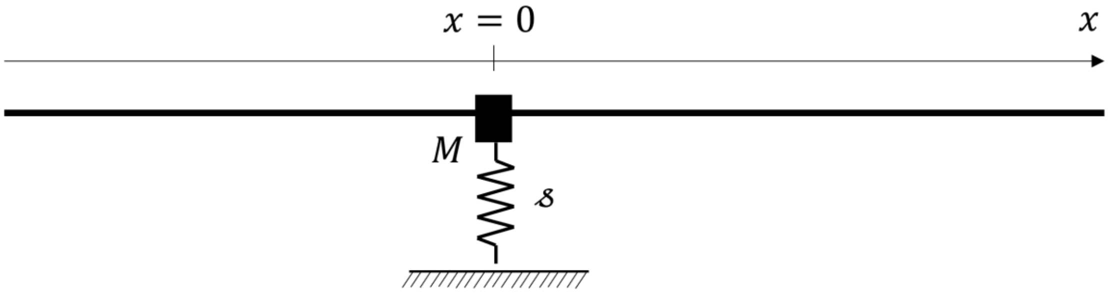
PRIMER PARCIAL ONDAS 2024

09/05/2024

Ejercicio 1.(15 PTS)

Una cuerda infinita de densidad lineal de masa ρ y sometida a una tensión de módulo $|\vec{T}|$ tiene una masa M acoplada en $x = 0$. La masa a su vez está sujeta a un resorte de constante $\mathscr{s}$ como se muestra en la figura. Suponga una onda armónica de frecuencia ω que incide desde las x negativas. (a) ¿Para qué valor de ω el coeficiente de reflexión es nulo? (b) Si la constante del resorte vale $\mathscr{s} = 2\omega^2 M$, hallar la diferencia de fase entre la onda transmitida y la onda incidente.



Ejercicio 2. (17 pts)

La ecuación de Euler expresa la ecuación de movimiento en un fluido no viscoso en la aproximación de pequeñas oscilaciones:

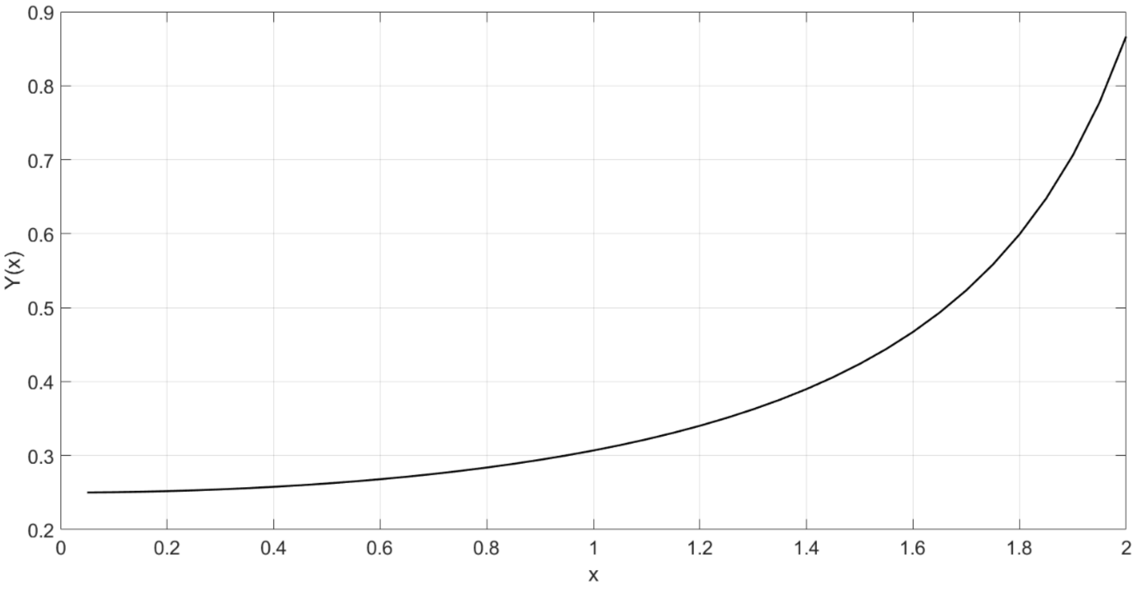
$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla P'$$

(a) Mostrar que esta ecuación permite definir el potencial de velocidades ϕ de manera que $\vec{v} = \nabla \phi$. (b) Mostrar que el potencial de velocidades cumple con la ecuación de ondas. (c) Suponga que el potencial de velocidades es de la forma $\phi = f(ct - x)$. Mostrar que la impedancia específica del medio es $z_e = \rho_0 c$

Ejercicio 3. (18 PTS)

Suponga una membrana circular de radio $a = 25 \times 10^{-2}$ m y densidad superficial de masa $\rho = 0{,}1\ kg/m^2$ que se estira con una tensión por unidad de longitud $|\vec{T}| = 100\ N/m$ y tiene el borde fijo. (a) La membrana vibra en su modo fundamental y la amplitud en el centro es $1{,}0 \times 10^{-3}$ m. Deducir una expresión para la energía cinética de la membrana y hallar su amplitud. (b) Suponga ahora que sobre la membrana actúa un forzante armónico de la forma $P_0 e^{i\omega t}$ con $P_0 = 16\ Pa$. El material de la membrana es tal que, si la amplitud de vibración en el centro es mayor a 5 mm, la membrana se rompe. Hallar, en forma aproximada, la frecuencia angular máxima del forzante para que la membrana pueda vibrar sin romperse. La figura muestra un gráfico de la función:

$$Y(x) = \frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{J_0(x)} - 1\right]$$



DATOS Y FÓRMULAS ÚTILES

Relación de ortogonalidad funciones de Bessel:

$$\int_0^1 x J_m(j_{mn}x) J_m(j_{mh}x)\,dx = \frac{\delta_{nh}}{2}[J'_m(j_{mn})]^2$$

$$J'_0 = \frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x)$$

$$j_{01} \cong 2{,}405$$

$$J_1(j_{01}) \cong 0{,}519$$

La solución para una membrana forzada con un forzante de la forma $P_0 e^{i\omega t}$ está dada por:

$$z(r,t) = \frac{P_0}{k^2|\vec{T}|}\left[\frac{J_0(kr)}{J_0(ka)} - 1\right] e^{i\omega t}$$