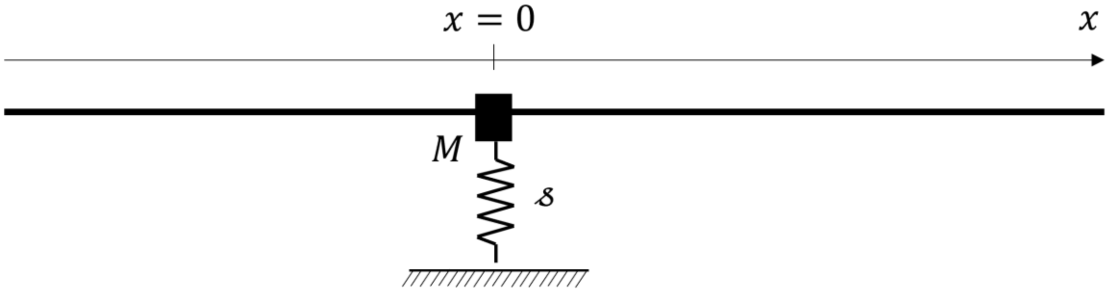
Ejercicio 1.

Una cuerda infinita de densidad lineal de masa ρ y sometida a una tensión de módulo $|\vec{T}|$ tiene una masa M acoplada en $x = 0$. La masa a su vez está sujeta a un resorte de constante $\mathscr{s}$ como se muestra en la figura. Suponga una onda armónica de frecuencia ω que incide desde las x negativas. (a) ¿Para qué valor de ω el coeficiente de reflexión es nulo? (b) Si la constante del resorte vale $\mathscr{s} = 2\omega^2 M$, hallar la diferencia de fase entre la onda transmitida y la onda incidente.



(a) En el lado izquierdo de la cuerda se propagan la onda incidente y la onda reflejada. De manera que si representamos con $y_1(x,t)$ el movimiento transversal de la cuerda para $x \leq 0$ tenemos:

$$y_1(x,t) = [Ae^{-ikx} + Be^{ikx}]e^{i\omega t}$$

Si representamos con $y_2(x,t)$ el movimiento transversal de la cuerda para $x \geq 0$ tenemos:

$$y_2(x,t) = Ce^{-ikx}e^{i\omega t}$$

El coeficiente de reflexión está dado por $r = B/A$. Para hallar este valor, debemos imponer las condiciones de borde en $x = 0$. La primera condición es que ambos desplazamientos transversales deben coincidir en ese punto de manera que:

$$y_1(x=0,t) = y_2(x=0,t)$$

$$\Rightarrow A + B = C$$

La segunda condición surge de la relación fundamental de la dinámica aplicada a la masa acoplada en $x = 0$. Tenemos en ese punto:

$$-|\vec{T}|\frac{\partial y_1}{\partial x} + |\vec{T}|\frac{\partial y_2}{\partial x} - \mathscr{s}y_1 = M\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = ik[Be^{ikx} - Ae^{-ikx}]e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial x} = -ikCe^{-ikx}e^{i\omega t}$$

La segunda condición de borde en $x = 0$ toma la forma:

$$ik|\vec{T}|[A - B - C] - \mathscr{s}[A + B] = -M\omega^2[A + B]$$

Sustituyendo $C = A + B$ encontramos:

$$B\left[M\omega^2 - 2ik|\vec{T}| - \mathscr{s}\right] = A[\mathscr{s} - M\omega^2]$$

$$\Rightarrow r = \frac{B}{A} = \frac{\mathscr{s} - M\omega^2}{M\omega^2 - \mathscr{s} - 2ik|\vec{T}|}$$

Para que r sea nulo se debe cumplir:

$$\mathscr{s} - M\omega^2 = 0 \ \Rightarrow \ \ \omega = \sqrt{\frac{\mathscr{s}}{M}}$$

Es decir, la frecuencia de la onda debe coincidir con la frecuencia natural de oscilación del resorte con la masa acoplada.

(b) Para hallar la diferencia de fase entre la onda transmitida y la onda incidente, debemos hallar el coeficiente C de la onda transmitida. Tenemos:

$$C = A + B = A\left(1 + \frac{\mathscr{s} - M\omega^2}{M\omega^2 - \mathscr{s} - 2ik|\vec{T}|}\right)$$

$$\Rightarrow C = -A\left(\frac{2ik|\vec{T}|}{M\omega^2 - \mathscr{s} - 2ik|\vec{T}|}\right)$$

Si la constante elástica del resorte vale $\mathscr{s} = 2M\omega^2$ tenemos:

$$C = A\left(\frac{2ik|\vec{T}|}{M\omega^2 + 2ik|\vec{T}|}\right)$$

Podemos usar:

$$|\vec{T}| = \rho c^2$$

$$k = \frac{\omega}{c}$$

$$\Rightarrow 2ik|\vec{T}| = 2i\rho\omega c$$

$$\Rightarrow C = A\left(\frac{2i\rho\omega c}{2i\rho\omega c + M\omega^2}\right) = A\left(\frac{1}{1 - i\left(\frac{M\omega}{2\rho c}\right)}\right)$$

De manera tal que la diferencia de fase entre la onda transmitida y la onda incidente vale:

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{M\omega}{2\rho c}\right)$$

Ejercicio 2

La ecuación de Euler expresa la ecuación de movimiento en un fluido no viscoso en la aproximación de pequeñas oscilaciones:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla P'$$

(a) Mostrar que esta ecuación permite definir el potencial de velocidades ϕ de manera que $\vec{v} = \nabla\phi$. (b) Mostrar que el potencial de velocidades cumple con la ecuación de ondas. (c) Suponga que el potencial de velocidades es de la forma $\phi = f(ct - x)$. Mostrar que la impedancia específica del medio es $z_e = \rho_0 c$

(a) Tomando el rotor en la ecuación de Euler tenemos:

$$\nabla \wedge \left(\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right) = -\nabla \wedge (\nabla P')$$

El rotor de un gradiente siempre es nulo. Considerando la densidad de equilibrio constante tenemos:

$$\frac{\partial(\nabla \wedge \vec{v})}{\partial t} = 0$$

Por lo tanto, si inicialmente $\nabla \wedge \vec{v} = 0 \Rightarrow \nabla \wedge \vec{v} = 0\ \forall t$. Físicamente esto quiere decir que las ondas acústicas no generan vórtices en un fluido no viscoso. De este resultado podemos escribir:

$$\vec{v} = \nabla\phi$$

(b) Para mostrar que el potencial de velocidades cumple con la ecuación de ondas, sustituimos $\vec{v} = \nabla\phi$ en la ecuación de Euler y obtenemos:

$$\nabla\left[\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + P'\right] = 0$$

Lo que indica que la cantidad entre paréntesis es una constante espacial. Siempre podemos definir ϕ de manera que esa constante sea nula. Por lo tanto:

$$P' = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Usando la ecuación de estado tenemos:

$$\rho' = -\frac{\rho_0}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Sustituyendo en la ecuación de continuidad tenemos:

$$-\frac{\rho_0}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \rho_0 \nabla^2\phi = 0 \Rightarrow \nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

(c) La impedancia específica del medio se define como:

$$z_e = \frac{P'}{v}$$

Tenemos:

$$P' = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}\ ; \phi = f(ct - x)$$

$$\Rightarrow P' = -\rho_0 c f'; f' = \frac{df}{d\eta}$$

Por otro lado:

$$\vec{v} = \nabla\phi = \nabla\, f(ct - x) = -f'\hat{\mathbf{\imath}}$$

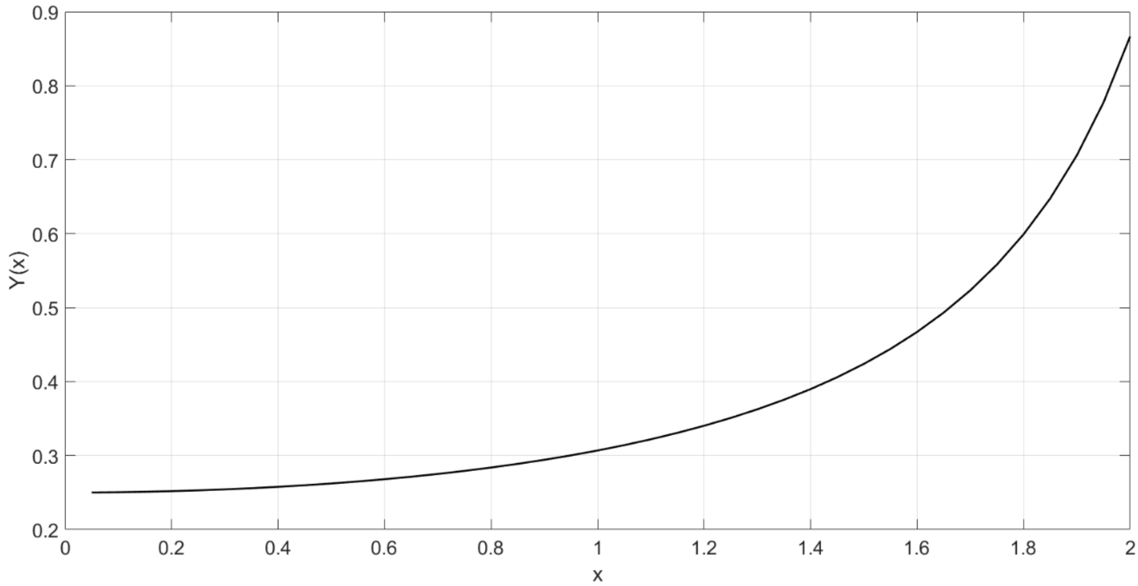
De manera que:

$$z_e = \frac{P'}{v} = -\frac{\rho_0 c f'}{-f'} = \rho_0 c$$

Ejercicio 3.

Suponga una membrana circular de radio $a = 25 \times 10^{-2}$ m y densidad superficial de masa $\rho = 0{,}1\ kg/m^2$ que se estira con una tensión por unidad de longitud $|\vec{T}| = 100\ N/m$ y tiene el borde fijo. (a) La membrana vibra en su modo fundamental y la amplitud en el centro es $1{,}0 \times 10^{-3}$ m. Deducir una expresión para la energía cinética de la membrana y hallar su amplitud. (b) Suponga ahora que sobre la membrana actúa un forzante armónico de la forma $P_0 e^{i\omega t}$ con $P_0 = 16\ Pa$. El material de la membrana es tal que, si la amplitud de vibración en el centro es mayor a 5 mm, la membrana se rompe. Hallar, en forma aproximada, la frecuencia angular máxima del forzante para que la membrana pueda vibrar sin romperse. La figura muestra un gráfico de la función:

$$Y(x) = \frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{J_0(x)} - 1\right]$$



(a) La membrana vibra en su modo fundamental de manera que podemos escribir:

$$z(r,t) = A_{01} J_0(k_{01} r)\cos(\omega_{01} t + \phi)$$

La energía cinética dE_c de un elemento de área $dS = r dr d\theta$ de la membrana está dado por:

$$dE_c = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 r dr d\theta$$

Por lo tanto, la energía cinética total está dada por:

$$E_c = \frac{1}{2}\rho\int_0^a\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 r dr d\theta = \rho\pi(\omega_{01}A_{01})^2\sin^2(\omega_{01}t + \phi)\int_0^a \big(J_0(k_{01}r)\big)^2 r dr$$

Usando la ortogonalidad de la función de Bessel encontramos:

$$= \rho\pi(\omega_{01}A_{01})^2\sin^2(\omega_{01}t + \phi)\frac{a^2}{2}\big(J_1(j_{01})\big)^2 = E_0\sin^2(\omega_0 t + \phi)$$

Podemos ahora sustituir valores numéricos:

$$\omega_{01} = ck_{01} = \sqrt{\frac{|\vec{T}|}{\rho}}\frac{j_{01}}{a} \cong 304{,}2\ rad/s$$

$$J_1(j_{01}) \cong 0{,}519$$

$$A_{01} = 10^{-3}\ m$$

$$\rho = 0{,}1\frac{kg}{m^2}$$

$$a = 25 \times 10^{-2}\ m$$

$$\Rightarrow E_0 \cong 2{,}45 \times 10^{-4}\ J$$

(b) La solución para una membrana forzada con un forzante de la forma $P_0 e^{i\omega t}$ está dada por:

$$z(r,t) = \frac{P_0}{k^2|\vec{T}|}\left[\frac{J_0(kr)}{J_0(ka)} - 1\right]$$

En el centro de la membrana $J_0(kr) = J_0(0) = 1$. Por lo tanto tenemos:

$$z(0,t) = \frac{P_0}{k^2|\vec{T}|}\left[\frac{1}{J_0(ka)} - 1\right] = \frac{P_0 a^2}{|\vec{T}|}\left[\frac{1}{(ka)^2}\left(\frac{1}{J_0(ka)} - 1\right)\right]$$

La función entre paréntesis rectos es la función $Y(x)$ dada en la letra del problema donde $x = ka$. Por lo tanto, debemos encontrar el valor x_0 tal que:

$$\frac{P_0 a^2}{|\vec{T}|} Y(x_0) = z_m$$

donde $z_m = 5 \times 10^{-3}\ m$ es el valor máximo del desplazamiento en el centro sin que se rompa la membrana. Tenemos entonces:

$$Y(x_0) = \frac{z_m|\vec{T}|}{P_0 a^2} \cong 0{,}5$$

Del gráfico vemos que $x_0 \cong 1{,}65$. Por lo tanto tenemos:

$$\omega_m = kc = \sqrt{\frac{|\vec{T}|}{\rho}}\frac{x_0}{a} \cong 208{,}7\frac{rad}{s}$$

De manera que debe ser $\omega < \omega_m$ para que la membrana vibre sin romperse.