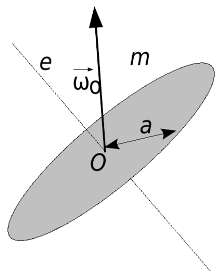
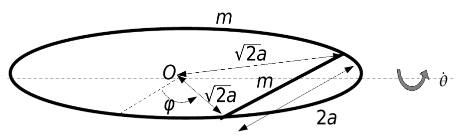
Práctico 7: Dinámica del rígido

1. Un disco homogéneo de masa m y radio a gira libremente con respecto a su centro fijo O. Su velocidad angular inicial $\vec{\omega}_0$ forma un ángulo α con el eje del disco. Hallar $\omega(t)$.



2. Una barra homogénea de longitud $2a$ y masa m se mueve de modo que sus extremos permanecen sobre un aro homogéneo de igual masa y radio $a\sqrt{2}$, el cual puede girar lilbremente alrededor de un diámetro dado, permaneciendo fijo su centro. Se desprecia la acción de la gravedad. Hallar la condición que deben satisfacer las condiciones iniciales para que cada extremo de la barra toque todos los puntos del aro.



3. Halle el Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento para los siguientes sistemas:
a) Un trompo simétrico que se mueve libremente.
b) Un trompo simétrico con un punto fijo que se mueve en el campo gravitatorio terrestre.
En ambas partes use como coordenadas los ángulos de Euler y halle los momentos canónicos conjugados, verificando en que casos son constantes.

4. Un trompo simétrico con un punto fijo está sometido únicamente a su peso. Inicialmente $\theta_0 = \pi/2$ y $\dot{\theta}_0 = 0$, siendo θ el ángulo que forma el eje del trompo con la vertical. ¿Qué condición tienen que cumplir las demás condidiones iniciales para que el eje del trompo llege en algún instante a la vertical?

5. Un trompo simétrico gira con velocidad angular ω alrededor de su eje vertical.

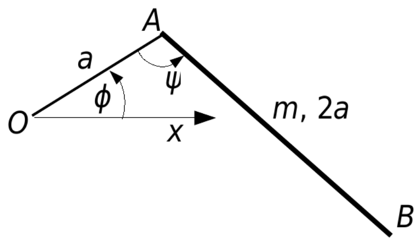
   (a) Hallar el valor mínimo Ω, de ω para que el movimiento sea estable

   (b) Supongamos que además un par de fuerzas $-\lambda\vec{\omega}$ con λ pequeño, actúa sobre el trompo. Inicialmente el trompo gira alrededor de su eje vertical con una velocidad angular ω_0. ¿Durante cuanto tiempo permanecerá en la vertical?

6. Sobre un plano horizontal liso se mueven una barra OA sin masa, de longitud a, y una barra AB homogénea de longitud $2a$ y masa m. En el extremo hay aplicada una fuerza

$$\vec{F} = m\frac{k^2a^2}{r^2}\frac{\vec{B}-\vec{O}}{r} \tag{1}$$

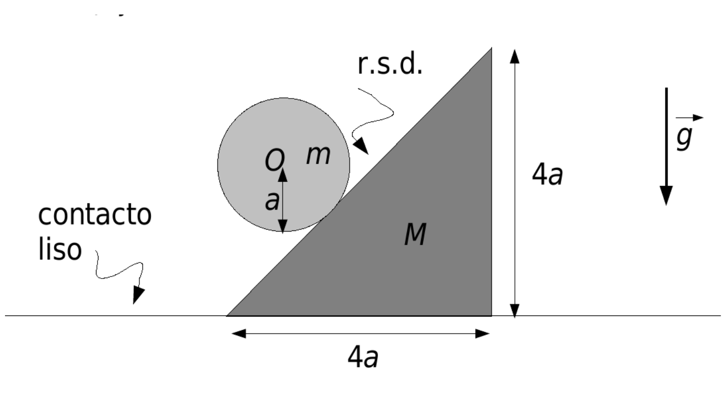
siendo $r = |\vec{O} - \vec{B}|$, la distancia OB y k una constante. Sean los ángulos $Ox, OA = \phi$, $OA, AB = \psi$.



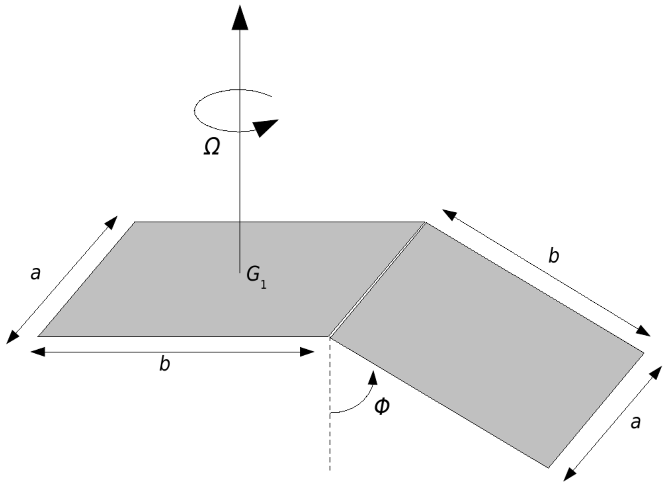
   (a) Hallar las ecuaciones del movimiento. Inicialmente $\phi = 0$, $\psi = \pi/2$, $\dot{\phi} = \omega$ y $\dot{\psi} = 0$.

   (b) Suponiendo que se aplica a la barra un par de fuerzas en O, de modo que gire con velocidad angular ω constante, hallar una ecuación del tipo $f(\psi, \dot{\psi}) = 0$. Hallar una expresión para el par aplicado.

7. Considere el sistema de la figura (contenido en un plano vertical fijo) formado por una lámina triangular (triángulo rectángulo isóceles de cateto $4a$) homogénea de masa M, que desliza sin rozamiento (apoyando uno de sus catetos) sobre un plano horizontal liso, y un disco (de masa m y radio a) también homogéneo, que rueda sin deslizar sobre la hipotenusa de la lámina triangular. ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema? Halle el Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento, si el sistema está sometido a su peso en el campo gravitatorio terrestre. Halle las constantes de movimiento (integrales primeras) del sistema.



8. Se tienen dos placas iguales, de espesor despreciable y lados a y b. Son homogéneas, de masa m. Una de ellas está fija por su baricentro a un eje vertical que gira con velocidad angular constante Ω. La otra placa está unida a la anterior por una bisagra ideal, como se ve en la figura 5, que le permite girar libremente. Halle el Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento, suponiendo *i)* que no hay gravedad, *ii)* que la hay. En ambos casos, diga si hay



posiciones de equilibrio estable.

9. En un plano vertical fijo, un semidisco (cilindro semicircular de espesor despreciable) homogéneo, de masa M y radio a, descansa sobre un plano horizontal (ver figura 5'). El baricentro G ($C.M.$ en la figura) del semidisco está una distancia $\frac{4a}{3\pi}$ más abajo que el centro geométrico del disco entero y el momento de inercia del semidisco (respecto a G) es I conocido. Halle el Lagrangiano y las ecuaciones de Lagrange para el movimiento del sistema (en el plano vertical fijo), suponiendo que *i)* el suelo es liso, *ii)* que el semidisco rueda sin deslizar. En ambos casos, halle las constantes de movimiento del sistema.