Ecuaciones Diferenciales

Práctica : Espacios de Sobolev y soluciones débiles

Ejercicio 1. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $1 \leq p \leq \infty$, $k \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tal que $|\alpha| \leq k$. Demostrar las siguientes propiedades para $u, v \in W^{k,p}(U)$:

1. $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$.
2. $D^\beta \left(D^\alpha u\right) = D^\alpha \left(D^\beta u\right) = D^{\alpha+\beta} u$ para todo $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ tal que $|\beta| \leq k - |\alpha|$.
3. $au + bv \in W^{k,p}(U)$ y $D^\alpha(au + bv) = aD^\alpha u + bD^\alpha v$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$.
4. $u \in W^{k,p}(V)$ para todo $V \subset U$ abierto.
5. Si $f \in C_c^\infty(U)$, entonces $fu \in W^{k,p}(U)$ y $D^\alpha(fu) = \displaystyle\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f D^{\alpha-\beta} u$.

Ejercicio 2. Sean $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $1 \leq p < \infty$. Demostrar los siguientes resultados:

1. Si $u \in W^{1,p}(I)$, entonces existe $\tilde{u} \in AC(I)$ tal que $u = \tilde{u}$ en casi todo punto de I y la derivada débil de u coincide (como elemento de $L^p(I)$) con la derivada de $\tilde{u}$ en sentido clásico (que existe en casi todo punto de I).
2. Si $u \in W^{1,p}(I)$ y $p > 1$, entonces:

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq \left(\int_a^b |u'(t)|^p dt\right)^{1/p} |x - y|^{1-\frac{1}{p}} \qquad \forall\, x, y \in I.$$

Ejercicio 3. Probar que si $u \in H^1(\mathbb{R})$, entonces $\frac{1}{h}(u(\,\cdot\, + h) - u) \to u'$ en $L^2(\mathbb{R})$ si $h \to 0$.

Sugerencia 1: Escribir $\frac{1}{h}(u(\,\cdot\, + h) - u)$ como $u' * \varphi_h$, para alguna función φ_h adecuada.

Sugerencia 2: Probar primero $\|u(\,\cdot\, + h) - u\|_2 \leq h\|u'\|_2$ (aquí puede ser útil la desigualdad de Jensen) y luego usarlo para probar la convergencia buscada. Puede ser de utilidad considerar $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ convergente a u en $H^1(\mathbb{R})$.

Ejercicio 4. Sea $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Probar los siguientes resultados:

1. La inyección canónica es continua de $H^1(I)$ en $L^\infty(I)$, i.e. $H^1(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$. Mostrar que este mismo resultado es falso si se reemplaza I por un subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$.
2. Todo conjunto acotado en $H^1(I)$ es precompacto en $C(\bar{I})$, y por lo tanto en $L^2(I)$.
   Sugerencia: Usar el teorema de Arzelà-Ascoli.

Ejercicio 5. Sea $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo acotado. Probar que si $u \in H_0^1(I)$ entonces $u \in L^\infty(I)$ y existe una constante $C > 0$ independiente de u tal que $\|u\|_\infty \leq C\|u'\|_2$. Concluir que $\|u'\|_2$ es una norma equivalente a $\|u\|_{1,2}$ en $H_0^1(I)$.

Ejercicio 6. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $k \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < \infty$. Para $u \in W^{k,p}(U)$ y $\varepsilon > 0$ definimos $u^\varepsilon = \rho_\varepsilon * u$ en $U_\varepsilon = \{x \in U \,:\, \operatorname{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}$, donde $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ es el núcleo regularizante estándar (ver Práctica 0). Demostrar que $u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$ y que $u^\varepsilon \to u$ en $W_{\text{loc}}^{k,p}(U)$ si $\varepsilon \to 0$.

Ejercicio 7. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado y con frontera de clase C^1. Probar que si $u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$ entonces existe una constante $C > 0$ independiente de u tal que:

$$\int_U |\nabla u|^2\, dx \leq C \left(\int_U |u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_U |\Delta u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Concluir que $\|\Delta u\|_2$ es una norma equivalente a la usual en $H_0^2(U)$.

Ejercicio 8. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $1 \leq p \leq \infty$. Probar que si $u \in W^{1,p}(U)$ es tal que $\nabla u = 0$, entonces u es constante en cada componente conexa de U.

Ejercicio 9 (Desigualdad de Poincaré-Wirtinger)**.** Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, conexo y acotado frontera de clase C^1. Probar que existe una constante $C > 0$ tal que:

$$\|u - \bar{u}\|_2 \leq C\|\nabla u\|_2 \qquad \forall\, u \in H^1(U),$$

donde $\bar{u} = \fint_U u\,dx$.

Sugerencia: Razonar por el absurdo y usar la compacidad de la inclusión $H^1(U) \hookrightarrow L^2(U)$.

Ejercicio 10 (Regla de la cadena)**.** Sean $1 < p < \infty$ y $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado con frontera de clase C^1. Demostrar que si $F \in C^1(\mathbb{R})$ tiene derivada acotada y $u \in W^{1,p}(U)$, entonces $F \circ u \in W^{1,p}(U)$ y $\partial_i(F \circ u) = (F' \circ u)\partial_i u$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Ejercicio 11. Considerar el siguiente problema para el operador *bilaplaciano*:

$$\Delta^2 u = f \quad \text{en} \quad U, \qquad u = \partial_{\mathbf{n}} u = 0 \quad \text{en} \quad \partial U, \tag{1}$$

donde $f \in C(U)$ y $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado con frontera de clase C^1. La notación Δ^2 significa $\Delta(\Delta u)$.

1. Demostrar que $u \in C^4(U) \cap C^1(\bar{U})$ es solución de (1) si y sólo si es solución de la siguiente formulación débil para (1):

   Hallar $u \in H_0^2(U)$ *tal que* $\int_U \Delta u \Delta v\,dx = \int_U fv\,dx$ *para toda* $v \in H_0^2(U)$,

   donde $f \in L^2(U)$.

2. Demostrar que (1) admite una única solución débil.

Ejercicio 12. Considerar el siguiente problema de Neumann:

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en} \quad U, \qquad \partial_{\mathbf{n}} u = 0 \quad \text{en} \quad \partial U, \tag{2}$$

donde $f \in C(U)$ y $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado con frontera de clase C^1.

1. Probar que $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$ es solución de (2) si y sólo si es solución de la siguiente formulación débil de (2):

   Hallar $u \in H^1(U)$ *tal que* $\int_U \nabla u \cdot \nabla v\,dx + \int_U uv\,dx = \int_U fv\,dx$ *para toda* $v \in H^1(U)$,

   donde $f \in L^2(U)$.

2. Demostrar que (2) admite una única solución débil.

Ejercicio 13. Considerar el siguiente problema de Neumann:

$$-\Delta u = f \quad \text{en} \quad U, \qquad \partial_{\mathbf{n}} u = 0 \quad \text{en} \quad \partial U, \tag{3}$$

donde $f \in C(U)$ y $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado con frontera de clase C^1.

1. Deducir la formulación débil para (3) sobre el espacio $V = \{u \in H^1(U) : \int_U u\,dx = 0\}$ y mostrar que si existe una solución débil, entonces $\int_U f\,dx = 0$.
2. Demostrar que si $f \in L^2(U)$ verifica $\int_U f\,dx = 0$, entonces existe una única solución débil de (2) en V. Más aún, dicha solución es única en $H^1(U)$, salvo constante.

Ejercicio 14 (Principio débil del máximo)**.** Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado con frontera de clase C^1, y sea $\mathcal{L}$ el operador elíptico definido por:

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u),$$

donde $a_{ij} \in L^\infty(U)$ para $i, j = 1, \dots, n$ y existe $\lambda > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \qquad \text{para todo} \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad \text{y todo} \quad x \in U.$$

Se dice que $u \in H^1(U)$ verifica $\mathcal{L}u \leq 0$ en sentido débil o, equivalentemente, que es una subsolución débil de $\mathcal{L}u = 0$ si:

$$\int_U \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_j u \partial_i v \, dx \leq 0 \qquad\qquad \forall\, v \in H_0^1(U),\ v \geq 0.$$

1. Verificar que $u \in C^2(U)$ es subsolución débil de $\mathcal{L}u = 0$ si y sólo si $\mathcal{L}u \leq 0$.
2. Probar que si u es subsolución débil de $\mathcal{L}u = 0$ y $u^+ \in H_0^1(U)$ (es decir $u \leq 0$ en ∂U), entonces $u \leq 0$ en U.