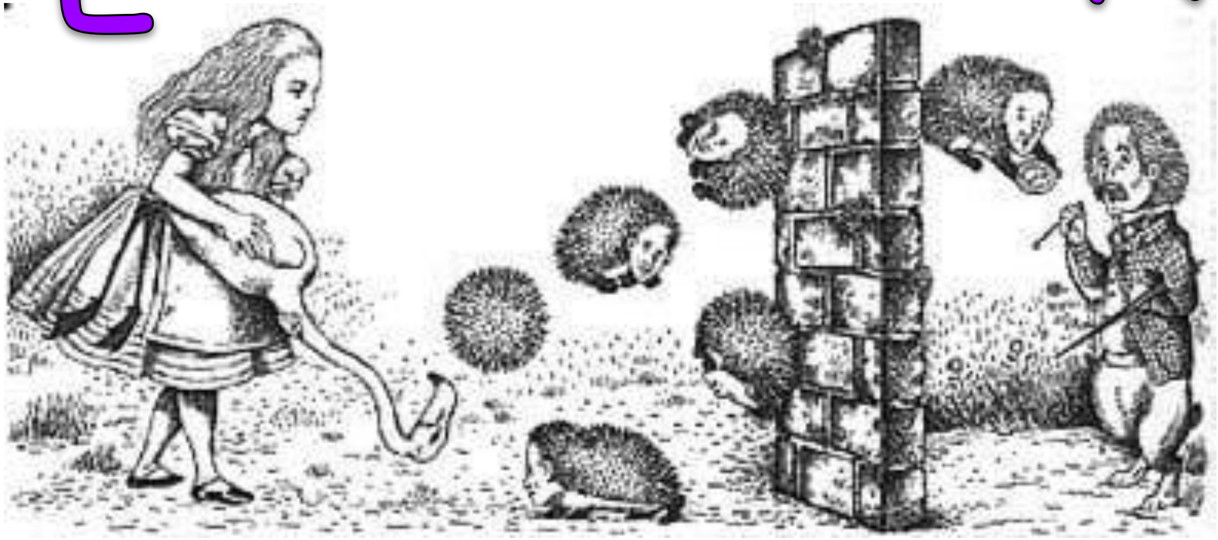
EFECTO TÚNEL

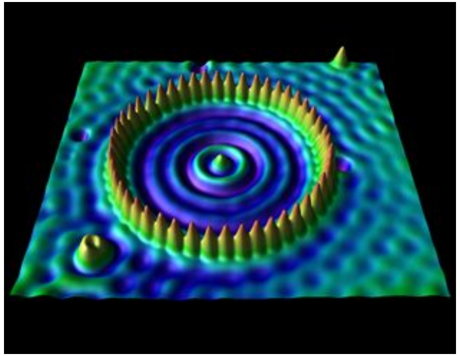


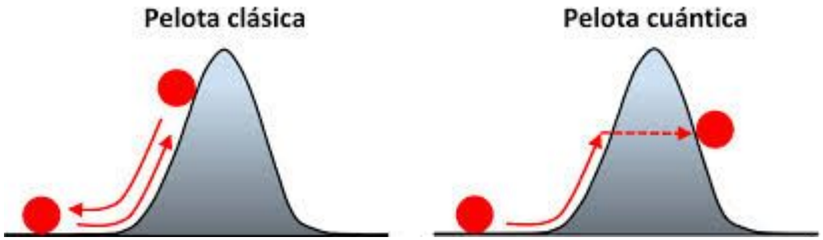
Iris Gómez, Inés Bouzas, Sebastián Alvez
Física Moderna - 2024

INTRODUCCIÓN

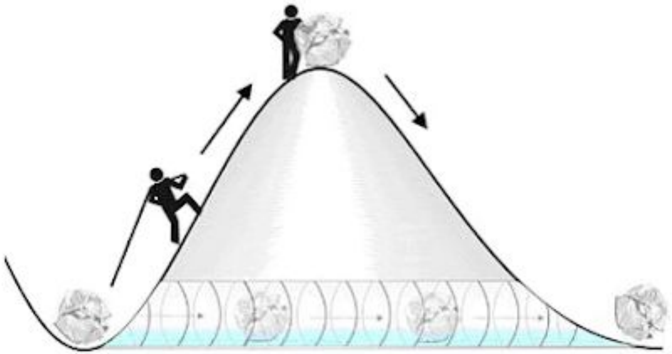
Ideas a tratar en la presentación:

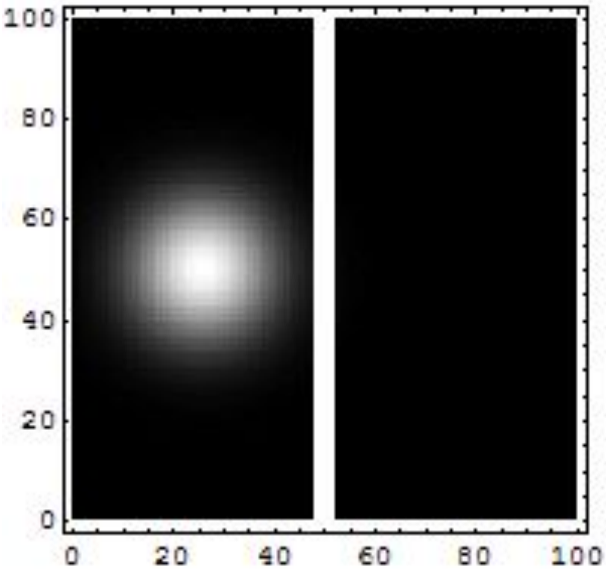
1) Problemas de Corriente de Probabilidad y Penetración de Barrera
2) Aproximación para el Coeficiente de Transmisión
3) Tuneleo en Núcleos



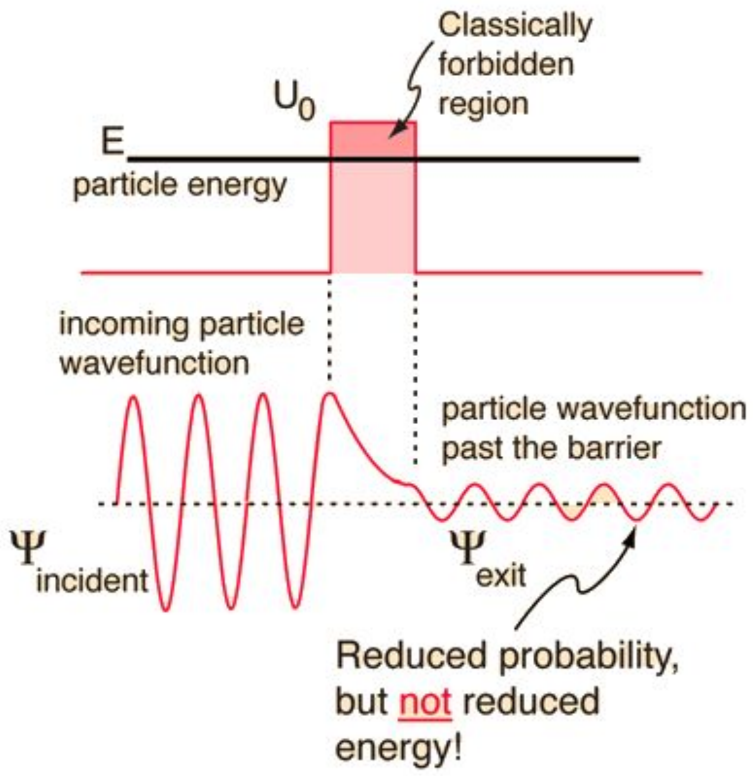


¿QUÉ ES EL EFECTO TÚNEL?





Tuneleo de la función de onda de un electrón a través de una barrera de potencial. Una fracción de la función de onda se transmite a través de la barrera.

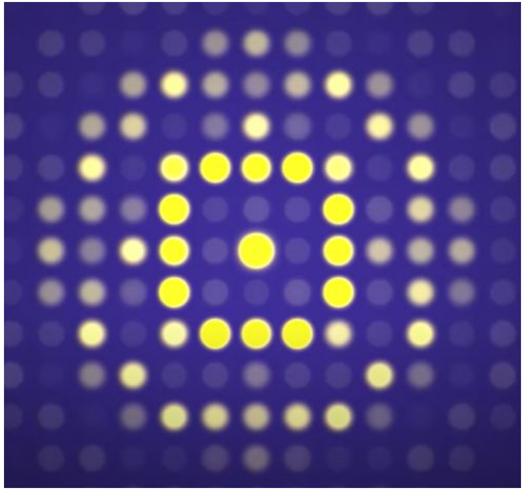


- Barrera de potencial finita
- El potencial es mayor que la energía cinética de la partícula (E<V)
- Partícula como función de onda
- Comienza como una función de onda sinusoidal
- Al encontrarse con la barrera la función de onda decae exponencialmente
- Luego de la barrera la función de onda disminuye su amplitud pero no desaparece

HAY PROBABILIDAD DE ENCONTRARLA DEL OTRO LADO DE LA BARRERA

EL ELECTRÓN...

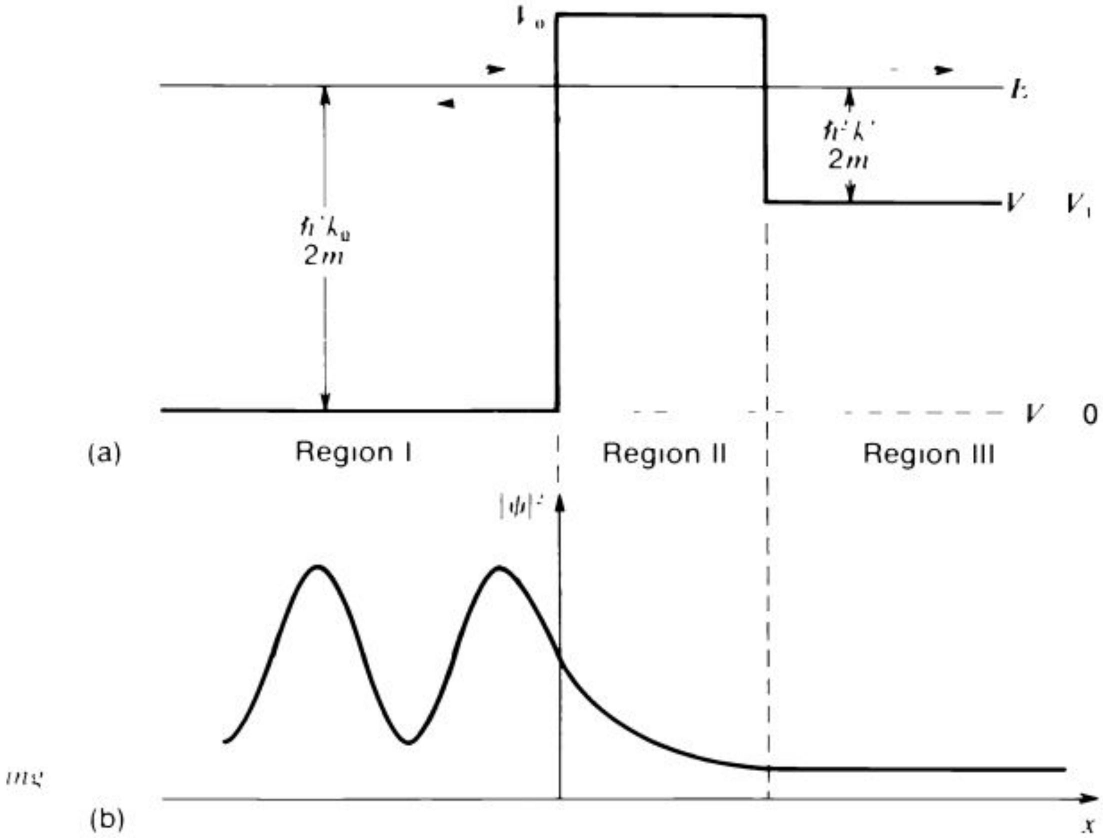
El electrón no tiene una posición definida, sino una probabilidad de encontrarse en distintos lugares.
En ocasiones el electrón se puede medir del otro lado de la barrera de potencial.



CORRIENTE DE PROBABILIDAD Y PENETRACIÓN DE BARRERA

Sabemos que las corrientes de probabilidad nos dan más certeza a los problema de penetración cuando los trabajamos con una aproximación independiente el tiempo.

Para poder visualizar y entender mejor este problema consideremos el ejemplo unidimensional donde la función de onda nos describe que las partículas inciden desde la izquierda sobre la barrera.



(a)
Region I
Region II
Region III
(b)
x

Separemos el potencial de la figura (a) en 3 regiones.

Para la primer región el factor correspondiente del espacio viene dado por:

$$\psi_1(x) = A_0 e^{ik_0 x} + A e^{-ik_0 x}$$

entonces : $\psi_1(x)^* = A_0^* e^{-ik_0 x} + A^* e^{ik_0 x}$ .Derivando ambas ecuaciones:

$$\frac{d\psi_1}{d\mathrm{x}} = ik_0 A_0 e^{ik_0 x} - ik_0 A e^{-ik_0 x}$$

$$\frac{d\psi_1^*}{d\mathrm{x}} = -ik_0 A_0^* e^{-ik_0 x} + ik_0 A^* e^{ik_0 x}$$

La corriente de probabilidad J1 en un punto de la región 1 es: $J_1 = -\frac{ih}{2m}(\psi_1^* \frac{d\psi_1}{dx} - \psi_1 \frac{d\psi_1^*}{dx})$

Sustituyendo las expresiones para ψ y dψ/dx obtenemos: $J_1 = v_0(A_0 A_0^*) - v_0(AA^*)$

donde $v_0 = \frac{\hbar k_0}{m}$. Como podemos observar la corriente de probabilidad neta es la diferencia de dos flujos componentes en direcciones opuestas.

Ahora si pasamos a analizar la región 3, la función de onda es de la forma:

$$\psi_3 = De^{ikx}$$

Esta función de onda tiene una corriente de probabilidad asociada $J_3 = v(DD^*)$

En una situación donde la partícula esté en estado estacionario para que la corriente de probabilidad sea una función continua requiere que tomemos $J_1 = J_3$

Eso es : $v_0(A_0 A_0^*) - v_0(A_0 A_0^*) = v(DD^*)$

Esta ecuación describe una corriente incidente representada por $v_0(A_0 A_0^*)$

Esta ecuación se divide en una corriente reflejada y una transmitida.

El enunciado de conservación de probabilidad se satisface por los valores de A y D que calculamos a partir de las condiciones impuestas para la continuidad de ψ y dψ, en ambos lados de la barrera.

Está claro que debe de existir continuidad en la corriente de probabilidad de la región 2. Para la región 2 la ecuación de onda viene dada por exponenciales reales.

$$\psi_2 = Be^{-\alpha x} + Ce^{\alpha x}$$

$$\psi_2^* = B^* e^{-\alpha x} + C^* e^{\alpha x}$$

También es fácil ver que la corriente de probabilidad está dada por la expresión:

$$J_2 = -\frac{i\hbar\alpha}{m}(B^*C - BC^*)$$

Por lo tanto existe una corriente no nula si B y C son amplitudes complejas con una diferencia de fase entre ellas, si tomamos: $B = B_0 e^{i\beta}$

$$C = C_0 e^{i\gamma}$$

entonces : $B^*C - BC^* = \dfrac{2i}{B_0 C_0 sen(\gamma - \beta)}$

Podemos ver que la corriente dentro de la barrera solo puede ser distinta de 0 si ambos exponenciales positivo y negativo están presentes en ψ.

COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN T

- Lo podemos pensar como la 'penetrabilidad'
- Probabilidad de que una partícula se encuentre en la región de la barrera de potencial
- Hallamos un valor aproximado para t para un potencial arbitario

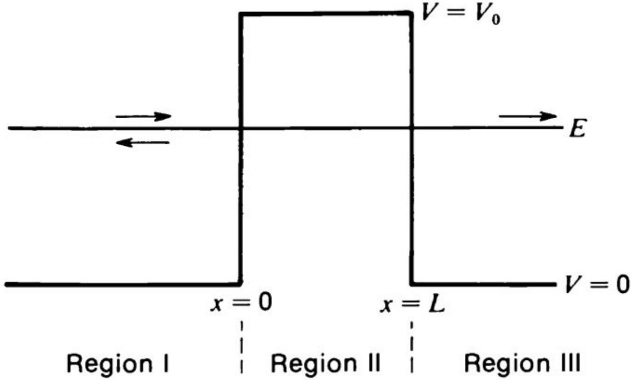
j=|ψ|²v **jincidente = jreflejado + j transmitido**

$$t = \frac{j_{trans}}{j_{incidente}} = \frac{\cancel{v}\,|\psi_t|^2}{\cancel{v}\,|\psi_i|^2} = |T|^2$$

BARRERA RECTANGULAR

Para cada región de una barrera de potencial rectangular, tenemos la ecuación de onda y aplicando condiciones de continuidad obtenemos el coeficiente de transmisión T

$$T = \left|\frac{D}{A_0}\right|^2 \approx \frac{16\alpha^2 k^2 e^{-2\alpha L}}{(\alpha^2 + k^2)^2}$$

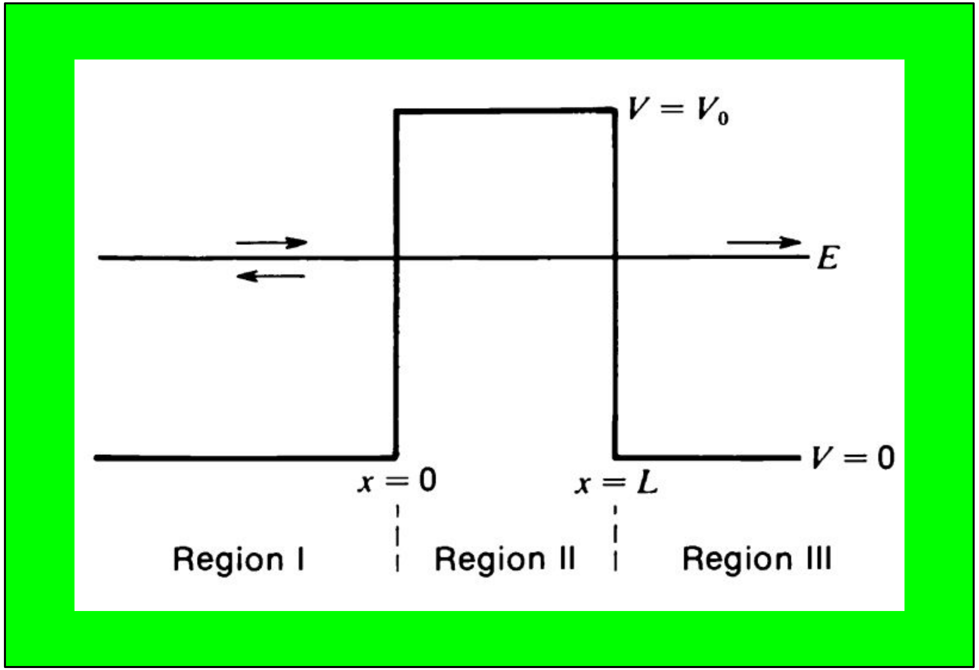


$$\psi_{\mathrm{I}}(x) = A_0 e^{ikx} + A e^{-ikx}$$
$$\psi_{\mathrm{II}}(x) = B e^{-\alpha x} + C e^{+\alpha x}$$
$$\psi_{\mathrm{III}}(x) = D e^{ikx}$$

$$k = \sqrt{2mE}/\hbar$$
$$\alpha = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$$

$$T \approx e^{-2\alpha L}$$

BARRERA RECTANGULAR



Para una barrera de potencial rectangular tenemos

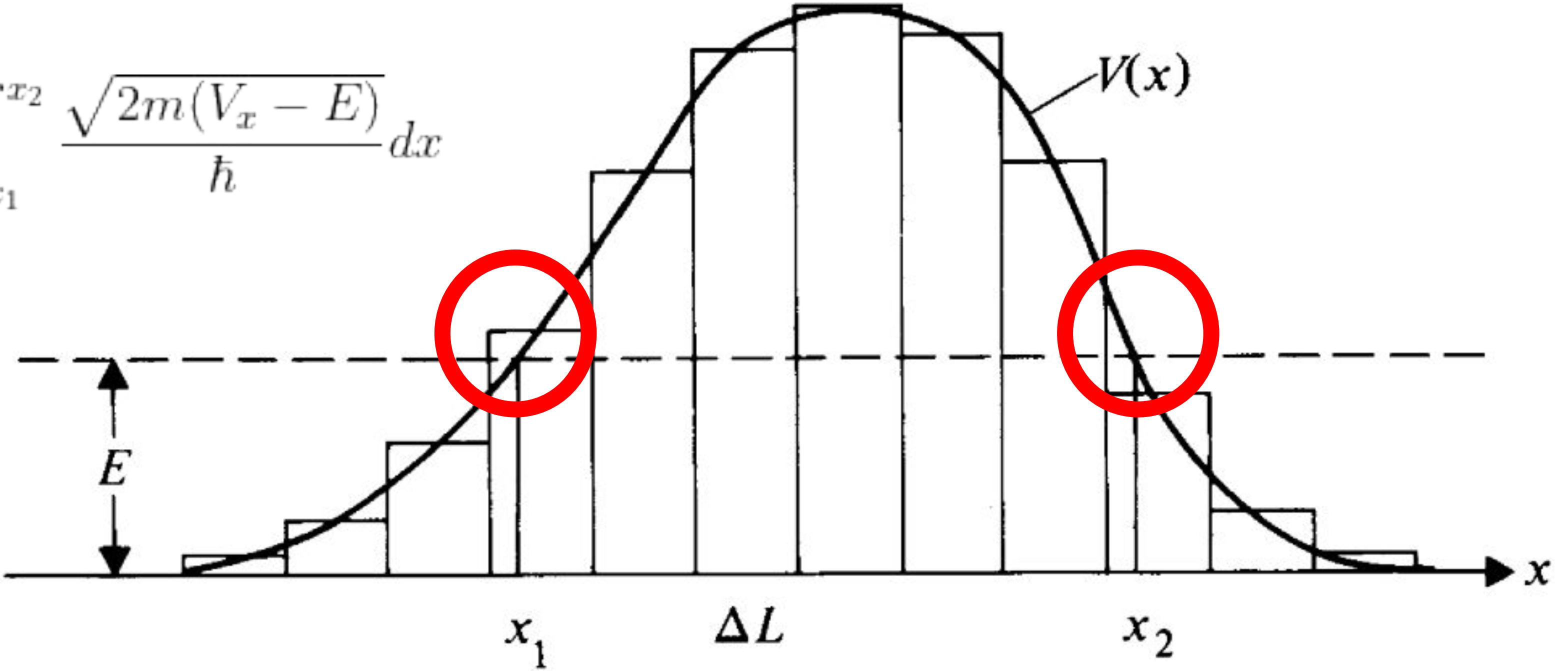
$$t = \frac{\psi(L)}{\psi(0)} \cong \exp^{-\frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}L}$$

Ahora queremos extender este resultado a una barrera de potencial arbitraria

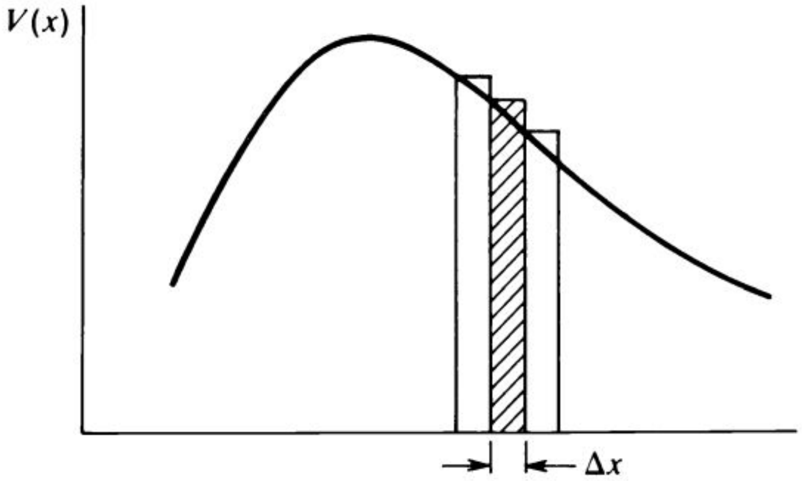
BARRERA ARBITRARIA

$$t \cong Ae^{-2\sum qiLi}$$

$$t \cong \exp^{-2\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{2m(V_x - E)}}{\hbar} dx}$$

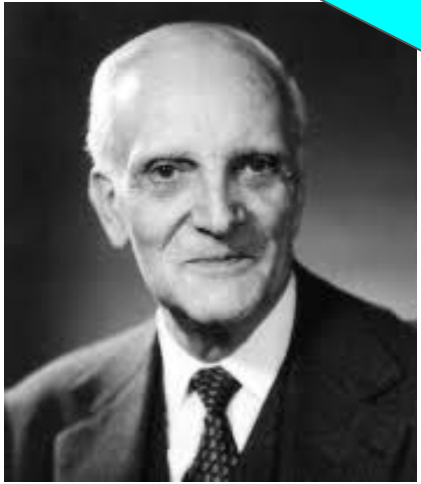


CALCULANDO LA APROXIMACIÓN

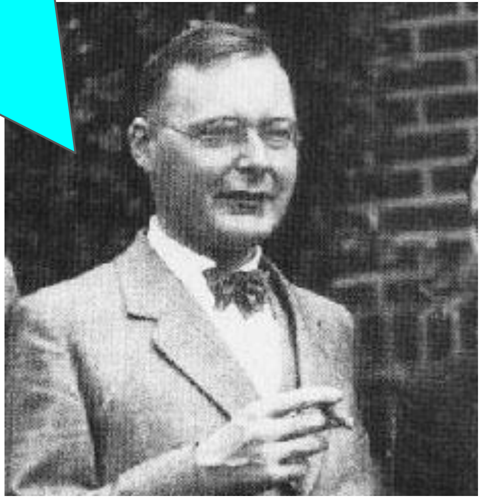


- Planteamos ecuación de Schrödinger
- Consideramos un decrecimiento exponencial de ψ, no tomamos las reflexiones entre cada barrera
- Límites de integración son X_1 y X_2 : donde $V(X_1)$=E y $V(X_2)$=E
- Desarrollo de Taylor

Nosotros tres hicimos una aproximación más correcta. Para eso hay que resolver la ecuación de Schrödinger teniendo en cuenta los puntos de retorno. Pero no se preocupen, para situaciones donde el coeficiente de transmisión T es pequeño, la expresión que explicaron sus compañeros anda lo más bien, así que pueden quedarse con esa.



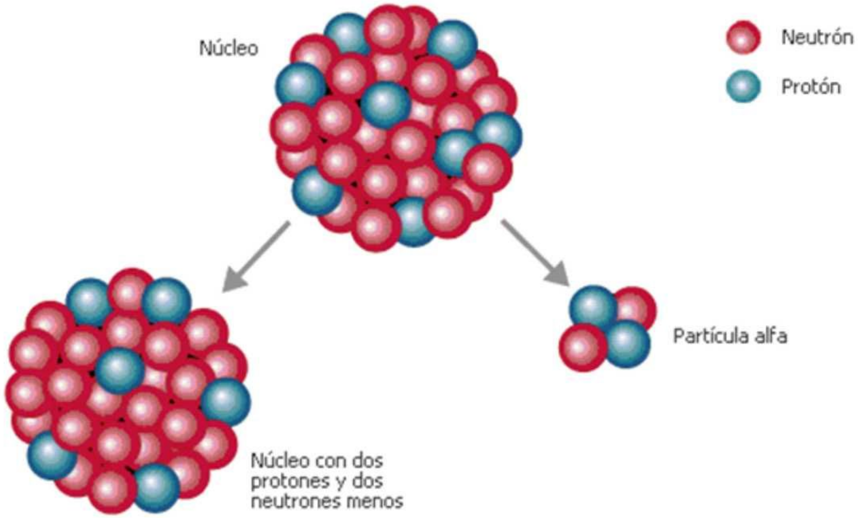
BRILLOUIN



KRAMERS

WENTZEL

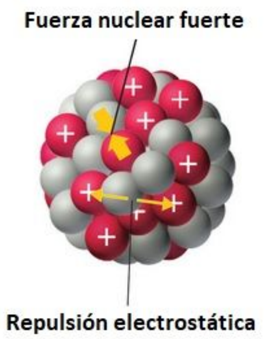
TUNELEO DE NUCLEOS



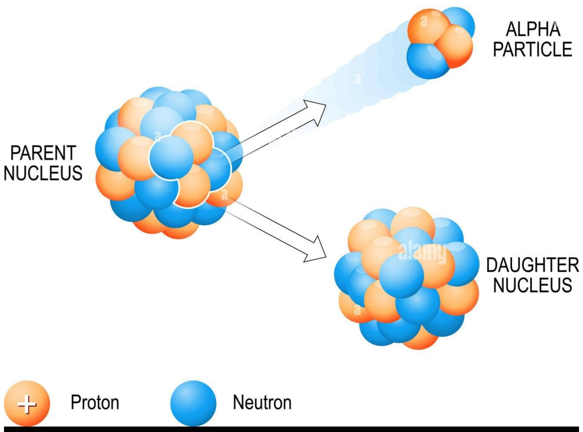
Los núcleos atómicos masivos experimentan un proceso de decaimiento a través del cual emiten partículas alfa. Esto es una aplicación del llamado Efecto túnel

Importancia: Gracias al tuneleo de partículas alfa el sol puede generar energía

FUERZAS EN NUCLEO ATÓMICO

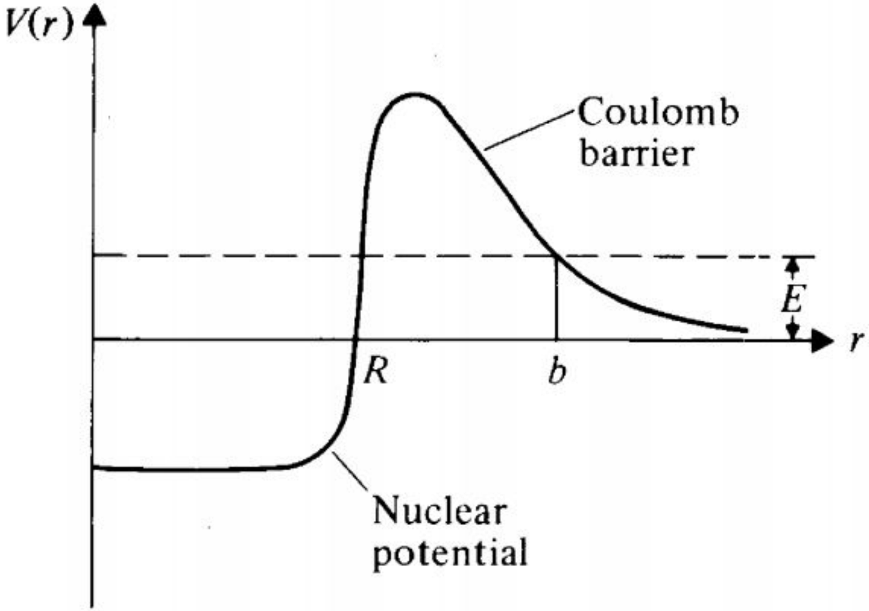


Alpha decay



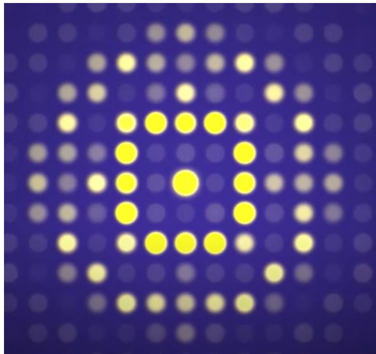
Para mantener el núcleo estable tenemos dos fuerzas: la **fuerza nuclear fuerte** que es una fuerza atractiva entre **protones y neutrones** y la **fuerza coulombiana** que es repulsiva y actúa sobre los **protones**.

Cuando tenemos átomos de gran tamaño estos pierden estabilidad dando lugar a su **decaimiento**



Las partículas alfa provenientes del pozo de potencial nuclear poseen una energía de entre 4 y 9 MeV; sin embargo la barrera de potencial que deben atravesar para salir del núcleo se corresponde con los 25 MeV. A pesar de esta dificultad se observan emisiones de partículas alfa

EFECTO TÚNEL



Comparando dos onda-partículas de distinta energía cinética al atravesar una barrera de potencial a través del efecto túnel

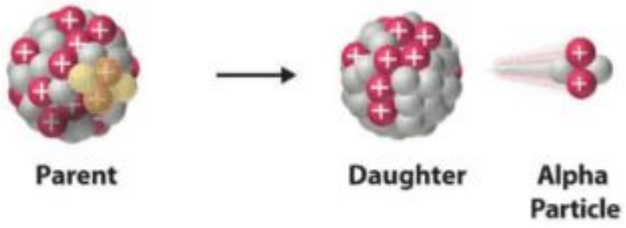
- Tengo dos partículas con energías tales que E2>E1
- La partícula con E2 experimenta un potencial efectivo menor que la que de E1
- La partícula con E2 experimenta una anchura de potencial menor que la de E1
- La partícula de mayor energía E2 tiene una probabilidad de transmisión mayor que la de E1
- El tiempo de vida medio va a ser menor para la partícula con E2

$$\boxed{T \approx e^{-2\alpha L}}$$

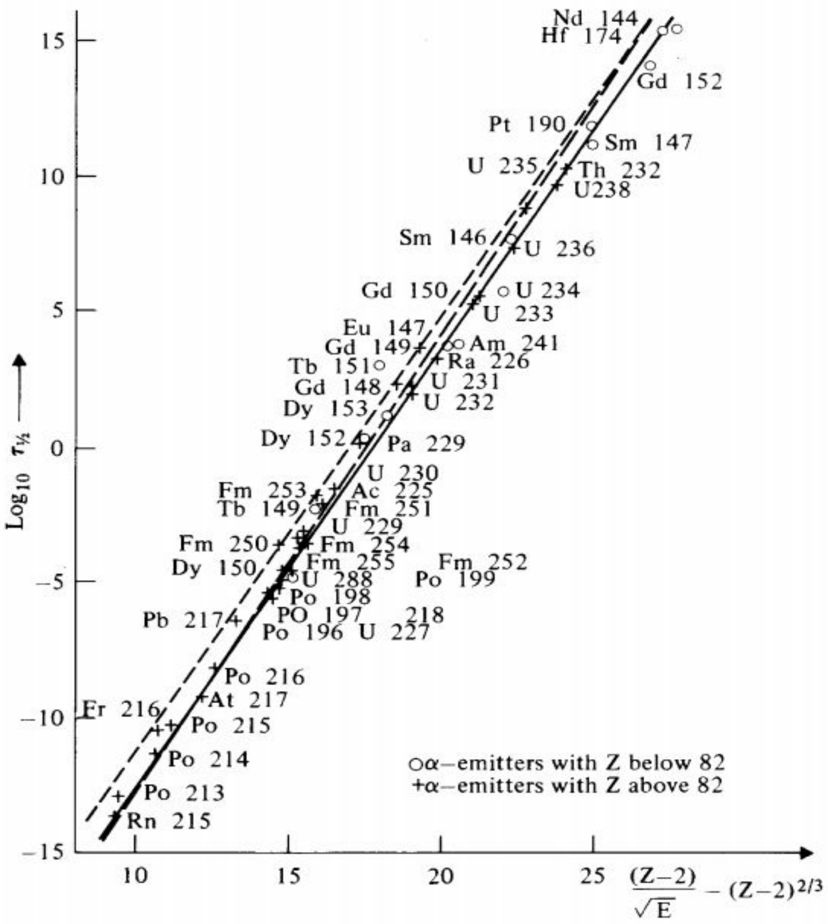
Si L, aumenta la probabilidad de atravesar la barrera disminuye

REGLA DE GEIGER-NUTTALL

En física nuclear, la **Ley de Geiger-Nuttall** o **Regla de Geiger-Nuttall** establece una relación entre la constante de decaimiento de un isótopo radioactivo y la energía de las partículas alfa que emite. En términos generales, se establece que los isótopos de vida corta emiten partículas alfa más energéticas que los de vida larga.



$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He$$



El presente gráfico muestra los datos experimentales de una gran cantidad de emisores de partículas alfa de diversa naturaleza.

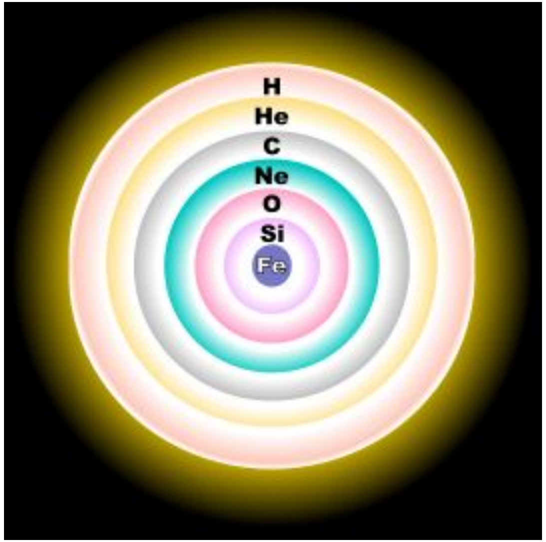
Se muestra el logaritmo de la vida media en función de

De esta gráfica $(Z-2)/\sqrt{E}-(Z-2)^{2/3}$ iente:

- Si el **tiempo de decaimiento** es mayor entonces significa que la partícula alfa presenta una **energía cinética menor**

$$\log_{10} T_{1/2} = \frac{A(Z)}{\sqrt{E}} + B(Z)$$

EJEMPLO: NUCLEOSINTESIS ESTELAR



El efecto túnel en la nucleosíntesis estelar es un fenómeno crucial que permite que ocurran reacciones nucleares en el interior de las estrellas a temperaturas y densidades que de otro modo serían insuficientes para superar las barreras de energía clásicas.

BIBLIOGRAFÍA

- ***An Introduction to Quantum Physics*. A.P French, Edwin E. Taylor (1978,primera edición)**

  Sección 9.6 :'Probability current and barrier penetration'

  Sección 9.7 'An approximation for barrier penetration calculations'

- ***The Structure of Matter: A Survey of Modern Physics*. Stephen Gasiorowicz (1979, primera edición)**

  Página 212: 'Tunneling'

  Páginas 216-220: 'Tuneleo en núcleos'

APROXIMACIÓN PARA COEFICIENTE t POTENCIAL ARBITRARIO

$$\frac{d^2\Psi}{d^2x} = \frac{2m}{\hbar^2}\left[V(x)-E\right]\Psi$$

Nombro $\alpha(x) = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\left[V(x)-E\right]}$

Me queda:

$$\frac{d^2\Psi}{d^2x} = \frac{2m}{\hbar^2}\left[V(x)-E\right]\Psi = \alpha(x)^2\Psi$$

La atenuación de Ψ para una barrera rectangular está dada por

$$\Psi(x+\Delta x) = \Psi(x)\, e^{-\alpha(x)\Delta x}$$

Aplicamos desarrollo de Taylor para $x \to 0$ de primer orden.

(Recordar que en este caso $x \to 0$ corresponde al punto de retorno x_1 donde $V(x_1) = E$)

$$\Psi(x) + \frac{d\Psi}{dx}\Delta x = \Psi(x)\left[1 - \alpha(x)\Delta x\right]$$

Se nos van términos:

$$\cancel{\Psi(x) - \Psi(x)} + \frac{d\Psi}{dx}\cancel{\Delta x} = -\Psi(x)\,\alpha(x)\cancel{\Delta x}$$

Nos quedan las variables separadas:

$$\frac{d\Psi}{\Psi(x)} = -\alpha(x)\,dx$$

Estamos listas para integrar entre x_1 y x_2:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d\Psi}{\Psi(x)} = \int_{x_1}^{x_2} -\alpha(x)\,dx$$

$$\ln\left|\frac{\Psi(x_2)}{\Psi(x_1)}\right| = -\int_{x_1}^{x_2}\alpha(x)\,dx$$

Aplico exponencial de ambos lados:

$$\frac{\Psi(x_2)}{\Psi(x_1)} = e^{-\int_{x_1}^{x_2}\alpha(x)\,dx}$$

Recuerdo definición de $t \Rightarrow t = |T|^2 = \frac{|\Psi_t|^2}{|\Psi_i|^2}$

$$t = \frac{|\Psi(x_2)|^2}{|\Psi(x_1)|^2} = e^{-2\int_{x_1}^{x_2}\alpha(x)\,dx}$$

$$\Rightarrow t = e^{-2\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\left[V(x)-E\right]}\,dx}$$

COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN PARA POTENCIAL $V(x)$ ARBITRARIO A PARTIR DE $\boxed{t}$ PARA UNA BARRERA DE POTENCIAL RECTANGULAR