Práctico 6

1. Suponga una onda de gravedad en un fluido incompresible en un estanque de profundidad h e infinito en las direcciones x e y. (a) Mostrar que la relación de dispersión para esta onda es $\omega = \sqrt{gk\tanh(kh)}$. (b) Hallar la velocidad de fase y la velocidad de grupo. (c) Hallar el límite de ambas velocidades en los casos $kh \gg 1$ y $kh \ll 1$. (d) Suponiendo que la onda se propaga en la dirección x y que es independiente de y, hallar la energía cinética y la energía potencial de la onda por unidad de longitud transversal y por unidad de longitud de onda.

2. (a) Suponga un tanque de bordes rígidos y dimensiones (Lx,Ly,h) que está abierto en la parte superior. Hallar el potencial de velocidades para la onda de gravedad. (b) Suponga un tanque circular con borde rígido de radio a y profundidad h abierto en la parte superior. Hallar el potencial de velocidades para la onda de gravedad.

3. Suponga que en la superficie de un líquido en aguas profundas se propaga una onda que es combinación lineal de dos ondas armónicas de la misma amplitud pero con longitudes de onda diferentes, λ_1 y λ_2 (a) Halle la onda resultante que se propaga en el medio. (b) Interprete los resultados obtenidos en la parte anterior.

4. Un paquete de ondas gaussiano se define como:

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(k) e^{i(kx-\omega(k)t)} dk$$

con $a(k) = A_0 e^{-\sigma(k-k_0)^2}$. Considere que $\omega(k)$ se puede expresar como $\omega(k) = \omega_0 + c_g(k-k_0) + \gamma(k-k_0)^2$ con $\omega_0 = \omega(k_0)$, $c_g = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_{\omega_0}$ y $\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}\right)_{\omega_0}$. (a) Muestre que, si se desprecia el término de segundo orden, el paquete conserva su forma a medida que se propaga y hallar la velocidad de propagación. (b) Si ahora se incluye el término de segundo orden en el desarrollo, muestre que el ancho del paquete aumenta y la amplitud disminuye a medida que se propaga.

5. Generalmente en un problema de propagación ondulatoria la relación de dispersión $\omega(k)$ queda determinada de manera implícita a partir de las condiciones de borde del problema de la manera $\Omega(k,\omega)=0$, donde Ω es una función diferenciable. Encuentre una expresión general para la velocidad de grupo conociendo la función Ω.

6. Halle la velocidad de grupo para una onda que cumple con la ecuación:

(a)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 u = 0$$

(b)

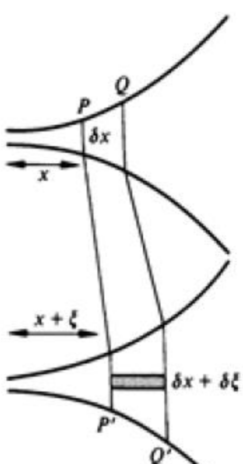
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\mu\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

7. Muestre que para cualquier guía de onda rectangular de paredes rígidas se cumple

$$\frac{c_g}{c_f} = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{lm}}{\omega}\right)^2}$$

8. Considere una guía de ondas de sección circular de radio a y paredes rígidas. La guía es infinita en la dirección z. (a) Mediante separación de variables, encuentre una expresión para la presión acústica dentro de la guía. (b) Hallar la frecuencia de corte del modo 1,1 y realizar un gráfico de velocidad de fase en función de la frecuencia para ese modo.

9. Considere una guía de ondas de sección circular de radio a=15 cm y paredes rígidas. La guía es infinita en la dirección z. Hallar la frecuencia máxima para la onda acústica que se puede propagar en la guía sin dispersión.



10. Considere la propagación de ondas de presión a lo largo de un tubo de sección transversal S que varía lentamente a lo largo de su longitud en la dirección x. (a) A partir de la ecuación de continuidad de la masa obtenga la expresión para la sobre densidad con la sobrepresión cero:

$$\rho_0 = \rho\left(1 + \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\zeta}{S}\frac{\partial S}{\partial x}\right)$$

(b) Obtenga la ecuación para la propagación ondulatoria:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x}(S\zeta)\right)$$

(c) Estudie el caso $S(x) = S_0 e^{2ax}$ mediante separación de variables y encuentre la frecuencia de corte.

11. Considere la propagación de una onda acústica a través de un fluido con pérdidas. Dicho fluido sigue el modelo de Stokes. Esto determina la siguiente relación entre la presión acústica y la variación de densidad:

$$P' = c^2\left(1 + \tau\frac{\partial}{\partial t}\right)\rho'$$

donde τ es un tiempo de relajación asociado a las pérdidas. (a) Mostrar que, para una onda armónica, existe una diferencia de fase entre la presión acústica y la densidad y hallarla. (b) Muestre que para esta ecuación de estado la condensación obedece la siguiente ecuación de ondas:

$$\left(1 + \tau\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^2\rho' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2} = 0$$

(c) Utilizando la transformada de Fourier en el tiempo, muestre que la ecuación anterior se puede expresar como una ecuación de Hemholtz:

$$\nabla^2\widetilde{\rho'} + \kappa^2\widetilde{\rho'} = 0$$

donde $\kappa^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\frac{1}{i\omega\tau+1}$ y $\widetilde{\rho'}$ representa la transformada de Fourier de ρ'. (d) Expresando $\kappa = \kappa_0 - i\alpha$, hallar una expresión para κ_0 y α en función de ω y τ. Interpretar el significado físico de κ_0 y α (e) Hallar la velocidad de fase y la velocidad de grupo para esta onda. (f) Mostrar que si $\omega\tau \ll 1 \rightarrow \alpha \propto \omega^2$. (g) Describa como obtendría los parámetros κ_0 y α a partir de medidas de laboratorio.

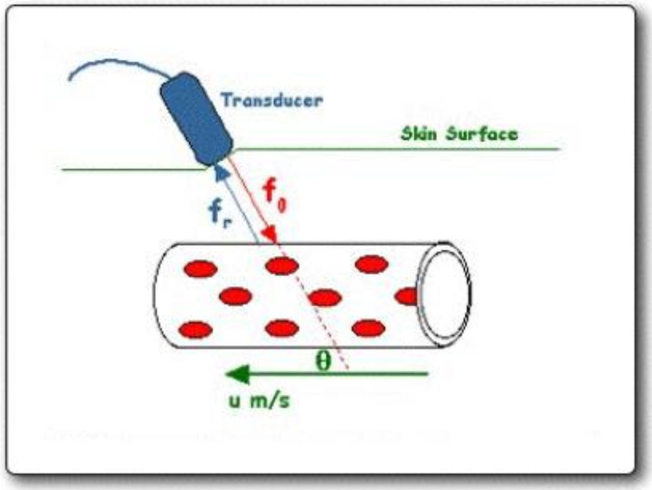
12. La relación ω=ck entre la frecuencia y el número de onda es válida solamente para una onda armónica que se propaga en un fluido en reposo. Consideremos ahora que el fluido tiene un flujo homogéneo y estacionario con velocidad $\vec{v}_0$. (a) Mostrar que, desde un sistema de coordenadas fijo, la ecuación anterior queda expresada como $\omega = ck + \vec{v}_0 \cdot \vec{k}$

(b) **Efecto Doppler**. Mostrar que el resultado anterior implica que cuando el sonido emitido por una fuente armónica en reposo (respecto al medio) de frecuencia ω_0 es recibida por un observador que se mueve con una velocidad relativa $\vec{v}_0$ respecto al medio, éste percibe una frecuencia ω dada por:

$$\omega = \omega_0\left(1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)\cos(\theta)\right)$$

donde θ es el ángulo formado entre los vectores $\vec{v}_0$ y $\vec{k}$. (c) Mostrar que si ahora es la fuente la que se mueve con respecto al medio mientras que el observador está en reposo la relación anterior cambia a:

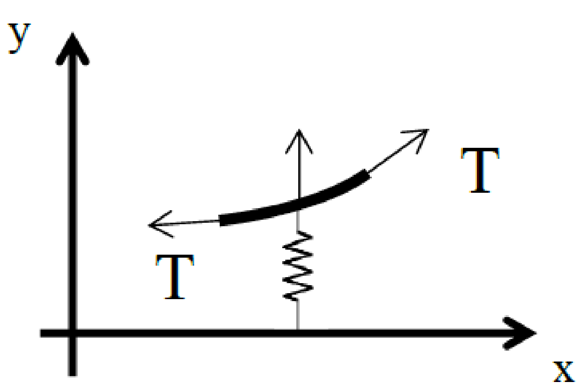
$$\omega = \omega_0 \left(1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)\cos(\theta)\right)$$



(d) Una aplicación típica del efecto Doppler en medicina consiste en estimar el flujo sanguíneo a través de los vasos. Para ello se utiliza un transductor doble en el que uno de ellos emite una onda de frecuencia ω_0, que se refleja en los constituyentes sanguíneos (típicamente glóbulos rojos) y retorna al transductor de recepción que recibe una frecuencia ω_r. Mostrar que el corrimiento frecuencial $\Delta\omega = \omega_r - \omega_0$ viene dado por:

$$\Delta\omega = \pm 2\omega_0 \left[\frac{\left(\frac{v_0}{c}\right)\cos(\theta)}{1 + \left(\frac{v_0}{c}\right)\cos(\theta)}\right] \cong \pm 2\omega_0 \left(\frac{v_0}{c}\right)\cos(\theta)$$

Donde el signo + vale cuando el flujo se acerca a la fuente y el signo – cuando se aleja. La aproximación final es válida si $v0 \ll c$ como efectivamente ocurre en la aplicación médica. Por lo tanto, conociendo el corrimiento frecuencial y el diámetro del vaso sanguíneo, se puede estimar el flujo.



13. Una cuerda infinita de densidad lineal de masa ρ, se encuentra sujeta a una tensión $\vec{T}$ e inmersa en un medio puramente elástico. Dicho medio ejerce sobre la cuerda una fuerza vertical por unidad de longitud de la forma $-\gamma y(x,t)$ donde $y(x,t)$ es el desplazamiento vertical de la cuerda con respecto a su posición de equilibrio y γ es una constante real positiva (ver esquema adjunto). (a) Deduzca la ecuación que describe el movimiento vertical de la cuerda. *Nota: Asuma pequeñas oscilaciones.* (b) Buscando soluciones de la forma $y(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$ encuentre la relación $k(\omega)$. Discuta qué relaciones deben cumplir ω, γ, $\vec{T}$ y $c_0 = \sqrt{|\vec{T}|/\rho}$ para que se cumplan las siguientes condiciones e interprételas físicamente:

i. k es real

ii. k es imaginario puro

iii. k=0

(c) ¿Existe dispersión? En caso afirmativo bosqueje la curva de dispersión para la velocidad de fase y la velocidad de grupo.