Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

PRÁCTICO 6

Integrales de línea.

1. a) Calcular $\int_T (x+y)ds$, donde T es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$ orientado positivamente (en la dirección contraria al movimiento de las agujas del reloj).

   Recordar que la integral a lo largo de una curva $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de una función f se define por
   $$\int_\alpha f ds = \int_a^b f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt.$$

   b) Calcular $\int_\alpha y^2 ds$, donde C, la cicloide, está parametrizada por $\alpha(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

   c) Calcular $\int_\beta \frac{x+y}{y+z} ds$, donde C está parametrizado por $\beta(t) = (t, \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}, t)$, $t \in [0,1]$.

2. Mostrar que la integral de línea del campo escalar $f(x,y)$ a lo largo de una curva dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, es
   $$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\operatorname{sen}\theta)\sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}d\theta.$$
   Usar esto para calcular la longitud de la *cardioide*, dada por $r(\theta) = 1 + \cos\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

3. Calcular $\int_\alpha F \cdot d\mathbf{s}$ para las siguientes F y α:

   a) $F(x,y,z) = (x,y,z)$ y α es el segmento de recta desde $(0,0,0)$ a $(1,1,1)$.

   b) $F(x,y) = (x^2y, x^3y^2)$, y α es la curva cerrada formada por porciones de la recta $y = 4$ y la parábola $y = x^2$, orientada positivamente.

   c) $F(x,y,z) = (y, z, xy)$, y $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

4. Calcular las siguientes integrales de línea:

   a) $\int_\alpha y dx + x dy$, donde α es la curva $y = x^2$ que une los puntos $(0,0)$ y $(2,4)$.

   b) $\int_\alpha y^n dx + x^n dy$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, donde α es la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

   c) $\int_\alpha y|y|dx + x|x|dy$, donde α es la frontera de $\{(x,y) : |x| + |y| < 1\}$.

   d) $\int_\alpha (z+y)dx + (x+z)dy + (y+x)dz$, donde α es la poligonal con vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ y $(1,1,1)$.

5. *Principio de conservación de la energía.* Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función de energía potencial del campo conservativo $F : U \to \mathbb{R}^n$, es decir, $\nabla f = -F$. La energía total de una partícula de masa m que se mueve a lo largo de una curva γ bajo la acción del campo conservativo F es la suma de su energía potencial y su energía cinética: $E(t) = f(\gamma(t)) + \frac{1}{2}m\|\gamma'(t)\|^2$. Probar que E es una función constante, lo que explica la adjetivación de “conservativo” para F (recordar que, según la ley de Newton, la fuerza es igual a la masa por la aceleración: $F(\gamma(t)) = m\gamma''(t)$).

6. Calcular el trabajo realizado por la fuerza $F(x,y) = (2xy, -x^2)$ a lo largo de los siguientes caminos que unen $O = (0,0)$ con $A = (2,1)$. (El trabajo se define como la integral de línea de la fuerza.)

   a) El segmento OA.

   b) La parábola determinada por la ecuación $y = \frac{x^2}{4}$.

   c) La poligonal OBA donde $B = (2,0)$.

   Relacionar con el ejercicio anterior.

7. Consideramos en $\mathbb{R}^2$ la 1-forma $\omega = y^2dx + (x^2 - 2xy)dy$.

   a) Calcular la integral de ω a lo largo del segmento de recta desde $(1,0)$ a $(0,1)$ y el cuarto de circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ que une dichos puntos.

   b) ¿ω es exacta?

8. Consideramos en $U = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ la 1-forma

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

   a) Probar que ω es cerrada.

   b) Hallar la integral de ω en el círulo unidad.

   c) Concluir que ω no es exacta.

9. Sea $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : xy = -1\}$ y una forma en U definida por

$$\omega = \frac{1-y^2}{(1+xy)^2}dx + \frac{1-x^2}{(1+xy)^2}dy.$$

   a) Mostrar que ω es exacta hallando todos sus potenciales en U.

   b) Calcular $\int_\alpha \omega$ donde α es una curva en U que une $(1,1)$ con $(3,2)$.

Ejercicios complementarios.

10. Este ejercicio intenta generar intuición sobre la noción de rotor de un campo vectorial.

    a) Sea $X = (P,Q)$ un campo vectorial suave en $\mathbb{R}^2$ tal que $X(o) = o$ (o es el origen) y S_r el círculo de centro o y radio r. Probar que

$$\lim_{r\to 0} \frac{2}{r} \fint_{S_r} X \cdot ds = \frac{\partial Q}{\partial x}(o) - \frac{\partial P}{\partial y}(o), \qquad (1)$$

    donde el símbolo $\fint$ indica el promedio, es decir, la integral de línea sobre la longitud de la curva.

Para esta parte se sugiere tener en cuenta la regla integral de Leibniz:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_a^b f(x,y)dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$$

para una función suave f.

Interpretar geométricamente el término de la izquierda en (1). Para esto puede ser de ayuda considerar el campo $X(x,y) = (-y,x)$.

b) Probar que la hipótesis $X(o) = o$ puede eliminarse. Sugerencia: considerar el campo $Y(x,y) = X(x,y) - X(o)$.

c) Sea ahora $X = (P,Q,R)$ un campo vectorial suave en $\mathbb{R}^3$. Concluir que

- $\lim_{r\to 0} \frac{2}{r}\fint_{\alpha_r} X\cdot ds = \frac{\partial Q}{\partial x}(o) - \frac{\partial P}{\partial y}(o)$, donde $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t, 0)$, $t\in[0,2\pi]$.
- $\lim_{r\to 0} \frac{2}{r}\fint_{\beta_r} X\cdot ds = \frac{\partial P}{\partial z}(o) - \frac{\partial R}{\partial x}(o)$, donde $\beta(t) = (r\sin t, 0, r\cos t)$, $t\in[0,2\pi]$.
- $\lim_{r\to 0} \frac{2}{r}\fint_{\gamma_r} X\cdot ds = \frac{\partial R}{\partial y}(o) - \frac{\partial Q}{\partial z}(o)$, donde $\gamma(t) = (0, r\cos t, r\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$.

d) Tomamos un punto $p\in\mathbb{R}^3$ y un vector unitario $v\in\mathbb{R}^3$. Probar que

$$Rot(X)(p)\cdot v = \lim_{r\to 0}\frac{2}{r}\fint_{S_r(p,v)} X\cdot ds,$$

donde $S_r(p,v)$ es el círculo de centro p y radio r en el plano perpendicular a v por el punto p. La orientación en $S_r(p,v)$ es la dada por v, es decir que si α es una parametrización positivamente orientada, entonces la base $\{\alpha(t)-p, \alpha'(t), v\}$ es siempre positiva (pensar en la regla de la mano derecha).

Sugerencia: considerar una isometría $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que preserva orientación tal que $\phi(o) = p$ y $\phi(0,0,1) = v$ y luego el campo

$$\tilde{X}(q) = (\phi^* X)(q) = \phi^{-1}(X(\phi(q)))$$

Observar que $\tilde{X}$ es el campo correspondiente a $\phi^*\omega_X$ y luego $Rot(\tilde{X}) = \phi^* Rot(X)$.

11. Reflexionar sobre el significado geométrico de la divergencia de un campo plano inspirándose en el ejercicio anterior.