Práctico 7

Formas diferenciales en variedades y teorema de Stokes.

1. a) Calcular la derivada exterior $\omega = d\xi$ de la 1-forma en $\mathbb{R}^2$ dada por $\xi = (1-x^2-y^2)(dx+dy)$.
   b) Calcular $\int_D \omega$, donde D es el disco unidad con la orientación usual.

2. Se considera $h : \mathbb{R} \to S^1$ dada por $h(t) = (\cos t, \sin t)$. Demostrar lo siguiente:
   a) Si ω es una 1-forma en S^1, entonces $\int_{S^1} \omega = \int_{[0,2\pi]} h^*\omega$.
   b) Una 1-forma ω en S^1 es exacta si y solo si $\int_{S^1} \omega = 0$.
   c) Sea ω una 1-forma en S^1 tal que $\int_{S^1} \omega \neq 0$. Si η es otra 1-forma en S^1, entonces existe una constante c y una función $f : S^1 \to \mathbb{R}$ tal que $\eta = c\omega + df$.
   d) Concluir que $H^1(S^1) \cong \mathbb{R}$, donde

$$H^1(S^1) = \frac{\{\omega \in \Omega^1(S^1) : \omega \text{ es cerrada}\}}{\{\omega \in \Omega^1(S^1) : \omega \text{ es exacta}\}}.$$

3. Integrar la forma $\omega = xy\, dx \wedge dy + y^2\, dx \wedge dz$ sobre:
   a) La esfera $\mathbb{S}^2$.
   b) La superficie $S = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z, z < 4)\}$.

4. Probar que si una 2-forma ω en $\mathbb{S}^2$ es exacta, entonces $\int_{\mathbb{S}^2} \omega = 0$.

5. Sea $\eta_0 \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ definida por $\eta_0 = x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy$. Se considera $U = \mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$, $r : U \to \mathbb{R}$ la función norma y $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ una función diferenciable.
   a) Calcular $d\eta_0$.
   b) Sea $\eta = (f \circ r)\eta_0 \in \Omega^2(U)$. Calcular $d\eta$ en función de f y hallar f de forma tal que η sea cerrada y $f(1) = 1$.
   c) Trabajando con el f hallado en la parte anterior, calcular $\int_{\mathbb{S}^2} \eta$, donde $\mathbb{S}^2$ está orientada con la normal apuntando hacia afuera.
   d) Concluir que η no es exacta.

6. Probar que una variedad M de dimensión n es orientable si y solo si existe $\omega \in \Omega^n(M)$ tal que $\omega(p) \neq 0$ para todo $p \in M$.

7. Sea M una variedad compacta y orientada de dimensión n. Se consideran los operadores integrales

$$\int_M : \Omega^n(M) \to \mathbb{R} \text{ y } \int_M : C^\infty(M) \to \mathbb{R}.$$

   a) Observar que ambos son lineales.

b) Probar que si $f \in C^\infty(M)$, entonces $\left|\int_M f\right| \leq \|f\|_\infty Vol(M)$.

8. Sean $f : M \to N$ y $g : N \to L$ mapas diferenciables entre variedades. Consideramos los $\mathbb{R}$-espacios vectoriales

$$Z^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) : d\omega = 0\} \text{ y } B^k(M) = d\Omega^k(M).$$

a) Probar que $f^*(Z^k(N)) \subset Z^k(M)$ y $f^*(B^k(N)) \subset B^k(M)$. Deducir que f^* induce una transformación lineal $f^\star : H^k(N) \to H^k(M)$, donde $H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M)$.

b) Probar que $(g \circ f)^\star = f^\star \circ g^\star$ y que $Id_M^\star = Id_{H^k(M)}$. Concluir que si M y N son variedades difeomorfas, entonces $H^k(M)$ y $H^k(N)$ son isomorfos para todo k.

9. Dados $0 < r < a$ se considera el toro

$$\mathbb{T}^2 := \Big\{\big((a + r\cos u)\cos v, (a + r\cos u)\sin v, r\sin u\big) : u, v \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Se definen $f : S^1 \to \mathbb{T}^2$ por $f(\cos t, \sin t) = \big((a + r)\cos t, (a + r)\sin t, 0\big)$ y $g : \mathbb{T}^2 \to S^1$ por $g\Big(\big((a + r\cos u)\cos v, (a + r\cos u)\sin v, r\sin u\big)\Big) = (\cos t, \sin t)$.

Demostrar que f y g están bien definidas y son de clase C^∞. Observar que $g \circ f = Id_{S^1}$ y, usando el ejercicio anterior, ver que $H^1(\mathbb{T}^2) \neq 0$.

Ejercicios complementarios.

12. Dado un espacio vectorial normado $(V, \| \|)$ se define la norma de una forma k-lineal alternada ϕ por

$$|\phi| = \sup\big\{|\phi(v_1, \ldots, v_k)| : \|v_1\| = \cdots = \|v_k\| = 1\big\}.$$

a) Probar que si M es una variedad diferenciable orientada y compacta de dimensión n y ω es una n-forma, entonces se cumple

$$\left|\int_M \omega\right| \leq \int_M |\omega(p)| dV(p) \leq \sup_{p \in M} |\omega(p)| Vol(M),$$

donde dV es la forma de volumen en M.

b) Decimos que una n-forma ω en $\mathbb{R}^n$ es integrable si para toda sucesión creciente de abiertos A_i con $\bigcup_i A_i \mathbb{R}^n$, existe el límite de $\int_{A_i} \omega$ y no depende de la elección de la sucesión A_i. Probar que si la función $p \mapsto |\omega(p)|$ es integrable en $\mathbb{R}^n$, entonces ω es integrable.

c) Probar que si ω una n-forma exacta en $\mathbb{R}^n$ y tiene un potencial con soporte compacto, entonces es integrable y

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0.$$

d) Consideramos una k-forma ω en $\mathbb{R}^n$. Probar que para toda $(n - k - 1)$-forma con soporte compacto η se cumple

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\omega \wedge \eta = (-1)^k \int_{\mathbb{R}^n} \omega \wedge d\eta.$$