Teoría Electromagnética
Curso 2024

Práctico 5
Potenciales retardados. Ondas electromagnéticas.

1. Muestre que los potenciales retardados satisfacen la condición de gauge de Lorentz. Para eso, muestre primero que se verifica la relación:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{J}}{R} \right) = \frac{1}{R} \left(\nabla \cdot \vec{J} \right) + \frac{1}{R} \left(\nabla' \cdot \vec{J} \right) - \nabla' \cdot \left(\frac{\vec{J}}{R} \right)$$

donde $R = |\vec{r} - \vec{r}\,'|$. A partir de éstas obtenga:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \cdot (\nabla R) \qquad\qquad \nabla' \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \cdot (\nabla' R)$$

y use este resultado para calcular $\nabla \cdot \vec{A}$.

2. Un alambre recto e infinito lleva una corriente:

$$I(t) \;=\; \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ I_0 & t > 0 \end{cases}$$

encuentre los campos eléctrico y magnético resultantes.

3. Suponga que en $t = 0$ se establece una corriente superficial uniforme $\vec{K}(t) = K_0\, t\, \hat{x}$ en el plano xy. Halle los campos eléctrico y magnético en todo el espacio para $t > 0$.

4. Considere una onda electromagnética monocromática plana propagándose en el vacío. En ese caso se puede escribir:

$$\mathbf{E}\left(\vec{r}, t\right) \;=\; \left[E_1 \hat{\epsilon}_1 + E_2 \hat{\epsilon}_2\right] e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)}$$

donde E_1 y E_2 son dos números complejos y $\hat{\epsilon}_1$, $\hat{\epsilon}_2$ son dos versores (reales) que cumplen:

$$\hat{\epsilon}_1 \cdot \hat{\epsilon}_2 = \hat{\epsilon}_1 \cdot \hat{k} = \hat{\epsilon}_2 \cdot \hat{k} = 0$$
$$\hat{\epsilon}_1 \times \hat{\epsilon}_2 = \hat{k}$$

a) Pruebe que si E_1 y E_2 tienen la misma fase, entonces representan a una onda cuyos campos oscilan en una dirección espacial fija (polarización lineal).

b) Pruebe que si $E_2 = \pm i E_1$ entonces corresponde a un campo eléctrico cuya dirección gira con velocidad angular ω en sentido antihorario y horario respectivamente (visto de frente a la onda y fijando la posición $\vec{r}$). Estas son las polarizaciones llamadas circular izquierda y circular derecha.

c) Dos ondas monocromáticas planas tienen la misma frecuencia, número de onda y amplitud, pero polarizaciones circulares opuestas. Demuestre que la superposición de las dos ondas es una onda linealmente polarizada con amplitud doble.

5. a) Para una onda monocromática, pruebe que el promedio temporal del vector de Poynting se puede calcular como:

$$< \vec{S} >= \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right]$$

b) Muestre que en un medio material se cumplen las relaciones:

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{D} &= 0 & \qquad \vec{k} \times \vec{E} &= \omega \vec{B} \\ \vec{k} \cdot \vec{B} &= 0 & \qquad \vec{k} \times \vec{H} &= -\omega \vec{D} \end{aligned}$$

y demuestre que en un medio no-magnético general el vector de Poynting es:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 \omega} \left[E^2 \vec{k} - (\vec{E} \cdot \vec{k}) \vec{E} \right] .$$

6. Calcule el tensor de tensiones de Maxwell para una onda monocromática plana que se mueve en la dirección $\hat{z}$ y está polarizada en la dirección $\hat{x}$. ¿Cómo se relaciona el flujo de momento con el flujo de energía en este caso?

7. Determine los coeficientes de transmisión y reflexión cuando una onda monocromática plana y linealmente polarizada incide en un medio dieléctrico lineal en los casos de:

a) polarización paralela al plano de incidencia.

b) polarización perpendicular al plano de incidencia.

c) Estudie en ambos casos la posible existencia de un ángulo de incidencia para el cual no hay onda reflejada. Este es el llamado ángulo de Brewster.

8. Para una onda electromagnética plana incidente desde un medio de índice de refracción n_1 a uno de índice de refracción n_2, con $n_1 > n_2$, si el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo crítico:

$$\theta_C \equiv arcsen \left(n_2 / n_1 \right)$$

se da el fenómeno de reflexión interna total.

a) Estudie los campos en ese caso a ambos lados de la interfase para el caso de polarización perpendicular al plano de incidencia.

b) Construya el vector de Poynting y pruebe que en promedio no se trasmite energía hacia el medio 2 (ver *Jackson, secc. 7.4*).

9. a) Una onda monocromática plana linealmente polarizada incide normalmente en una placa de espesor d de un medio dieléctrico con índice de refracción n y $\mu = \mu_0$ rodeada por el vacío. Calcule los coeficientes de trasmisión y reflexión. Discuta en función de d.

b) Discuta la situación considerada en a), pero para un medio conductor de conductividad g.

10. a) Pruebe que la profundidad de penetración (*skin depth*) de los campos en un mal conductor ($g \ll \omega\epsilon$) es $(2/g)\sqrt{\epsilon/\mu}$ (independiente de la frecuencia). Encontrar la profundidad de penetración (en metros) para el agua.

b) Muestre que la profundidad de penetración en un buen conductor ($g \gg \omega\epsilon$) es $\lambda/2\pi$, donde λ es la longitud de onda en el conductor. Encontrar la profundidad de penetración (en metros) para un metal típico $\left(g \approx 10^7\,(\Omega m)^{-1}\right)$ en el rango visible $\left(\omega \approx 10^{15} Hz\right)$, asumiendo $\epsilon = \epsilon_0$ y $\mu = \mu_0$.

c) Muestre que en un buen conductor el campo magnético tiene un retraso de fase de $\pi/4$ respecto al campo eléctrico.

11. a) Calcule el promedio temporal de la densidad de energía en una onda electromagnética plana en un medio conductor. Muestre que la parte magnética siempre es la dominante. (Resultado: $\left(k^2/2\mu\omega^2\right) E_0^2 e^{-2kz}$).

b) Muestre que la intensidad es siempre: $(k/2\mu\omega)\, E_0^2 e^{-2kz}$.

12. * En un medio anisotrópico, la relación entre el desplazamiento $\vec{D}$ y el campo eléctrico $\vec{E}$ viene dada por una *matriz dieléctrica* ϵ_{ab}:

$$D_a = \epsilon_{ab}\, E_b$$

Suponga que se tiene un material no magnético ($\mu = \mu_0$), donde se propagan ondas armónicas con amplitudes reales y vector $\vec{k}$. a) Muestre que se verifica la ecuación de valores propios (ecuación de Fresnel):

$$\sum_b \left(k_a k_b + \mu_0 \omega^2 \epsilon_{ab} - k^2 \delta_{ab}\right) E_b = 0$$

b) Los cristales *uniaxiales* tienen matrices dieléctricas que en la base de ejes principales tienen la forma:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_o & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_o & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_e \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{pmatrix}$$

muestre a partir de la ecuación de Fresnel que para cada dirección de $\vec{k}$ existen dos ondas con índices de refracción distintos. Las ondas se propagan a diferentes velocidades de fase y tienen estados de polarización lineal ortogonales. Este fenómeno se conoce como *birrefringencia*[1].

[1] Ver por ej. Vanderlinde, *Classical Electromagnetic Theory*, p. 231.

13. a) Determine las frecuencias de corte de modos TE y TM de una guía rectangular de lados a y b.

b) Considere una guía de onda rectangular con dimensiones $2,28cm \times 1,01cm$. ¿Qué modos TE se propagarán si la frecuencia externa es $1,70 \times 10^{10} Hz$? ¿Qué rango de frecuencias se deben usar para excitar sólo un modo TE? ¿Cuáles serían las longitudes de onda correspondientes en el espacio libre?

c) Con un trozo de esta guía se construye una cavidad de longitud $3cm$. ¿Cuáles son los modos más bajos que pueden existir dentro de la cavidad?

14. Pruebe que el modo TE_{00} no puede propagarse en una guía de onda rectangular.

Sugerencia: Pruebe que para este modo B_z deber ser 0 por lo que debe tratarse de un modo TEM.

15. * Considere una onda electromagnética propagándose en un medio dieléctrico lineal y no magnético donde el índice de reflacción $n(\vec{r}) = \sqrt{\epsilon(\vec{r})/\epsilon_0}$ cambia con la posición. Si el cambio en $n(\vec{r}$ se da en ecscalas mucho mayores a la longitud de onda (local) entonces puede aplicarse la aproximación eikonal.

a) Pruebe que las ecuaciones de Maxwell para $\vec{E}$ y $\vec{H}$ en el caso de ondas de frecuencia ω se reducen a

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} + \mu_0 \omega^2 \epsilon(\vec{r}) \vec{E} + \nabla \left(\frac{\vec{E} \cdot \nabla \epsilon(\vec{r})}{\epsilon(\vec{r})} \right) &= 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + \mu_0 \omega^2 \epsilon(\vec{r}) \vec{H} - i\omega \nabla \epsilon(\vec{r}) \times \vec{E} &= 0 \end{aligned}$$

b) Despreciando los términos que involucran variaciones espaciales de n frente a las variaciones de los campos observe que las ecuaciones de Maxwell para las componentes de los campos se reducen a la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 \psi + \frac{\omega^2 n^2(\vec{r})}{c^2} \psi = 0.$$

Sustituyendo por la expresión $\psi = e^{iS(\vec{r})\omega/c}$ obtenga la ecuación general para la *función eikonal* $S(\vec{r})$ y la forma aproximada (*aproximación eikonal*)

$$(\nabla S)^2 = n(\vec{r})^2.$$

c) Haciendo una expansión de Taylor en torno a un punto $\vec{r}_0$ para la función $S(\vec{r})$ muestre que, a primer orden, $\nabla S = n(\vec{r}_0)\hat{k}$ donde $\hat{k}$ es la dirección del vector de onda (local) en el punto $\vec{r}_0$. Definiendo ahora

$$\nabla S(\vec{r}) = n(\vec{r})\hat{k}(\vec{r})$$

obtenga una ecuación para los rayos $\vec{r}(s)$ que siguen la dirección del vector de onda local $\hat{k}(\vec{r})$ en términos de la longitud de arco s definida por

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \hat{k}.$$

Para ello considere el cambio del gradiente de S a lo largo de los rayos. Muestre que dicha ecuación para $\vec{r}(s)$ puede escribirse el la forma (*de Snell generalizada*)

$$\frac{d}{ds}\left(n(\vec{r})\frac{d\vec{r}(s)}{ds}\right) = \nabla n.$$

d) En una fibra óptica el índice de refracción cambia con la distancia al centro. Con ellos como motivación considere una onda que se propaga de manera oblicua en la dirección z y con cierta inclinación hacia la dirección x y con un índice de refracción que cambia de manera lineal en la dirección x. Obtenga la función $z(x)$ de los rayos e interprete.

Sugerencia: ver Jackson 3ra ed. Sección 8.10