Teoría Electromagnética
Curso 2021

Práctico 7
Relatividad y formulación covariante de la electrodinámica.

1. a)Verifique que el producto escalar de dos cuadrivectores $a^\mu a_\mu$ es invariante de Lorentz.

b)Muestre que los símbolos de Levi-Civita $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, definidos en forma análoga al caso tridimensional, son invariantes de Lorentz.

c)Note que como consecuencia de b) el tensor *dual*

$$\mathcal{G}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$$

es un tensor. Escribir en forma explícita (en función de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$) la matriz 4x4 con sus componentes.

2. Muestre que las ecuaciones de Maxwell pueden ser escritas en forma covariante como

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = \mu_0 J^\alpha, \qquad \frac{\partial \mathcal{G}^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0.$$

3. a) Muestre que $F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$, $\mathcal{G}^{\alpha\beta}\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ y $F^{\alpha\beta}\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ son invariantes bajo transformaciones de Lorentz.

b) Escriba los escalares anteriores en función de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$.

c) Suponga que en un sistema inercial $\vec{B} = 0$ pero $\vec{E} \neq 0$ en algún punto P. ¿Es posible encontrar algún otro sistema inercial en el que $\vec{E} = 0$ en P?

4. Considere el cuadrivector densidad de corriente J^μ.

a) Muestre que efectivamente es un cuadrivector.

b) Partiendo de las ecuaciones de Maxwell en forma covariante deduzca la ecuación de continuidad.

c) ¿Qué invariante Lorentz puede definir a partir de J^μ? Justifique.

5. Considere el cuadrivector $K^\mu = q u_\nu F^{\mu\nu}$ asociado a una carga puntual q de cuadrivelocidad u^μ.

a) ¿Qué representan las componentes de K^μ?

b) Suponga que la carga puntual se mueve a velocidad constante $\vec{u}$. Muestre que

$$\frac{1-(u/c)^2\cos^2(\theta)}{1-(u/c)^2}F^2$$

es invariante de Lorentz siendo $\vec{F}$ la fuerza de Lorentz sobre la carga y θ el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{F}$.

6. Utilizando las ecuaciones de transformación de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ bajo transformaciones de Lorentz, determine los campos generados por:

a) una carga puntual q a velocidad $\vec{v}$ constante. Sugerencia: parta de un marco de referencia con la carga puntual en reposo.

b) un capacitor de placas paralelas cargado con carga Q que se mueve a velocidad $\vec{v}$ paralela a sus placas.

c) un capacitor de placas paralelas cargado con carga Q que se mueve a velocidad $\vec{v}$ perpendicular a sus placas.

7. Usando el hecho de que la fase de una onda plana es independiente de la velocidad del observador:

a) Muestre que la cantidad $k^\alpha = (\omega/c, \vec{k})$ es un cuadrivector.

b) Deduzca la formula del efecto Doppler para los movimientos

(i) paralelo a la dirección de $\vec{k}$

(ii) perpendicular a la dirección de $\vec{k}$.

8. Un cable infinito de ancho despreciable, tiene una densidad de carga uniforme λ en el referencial K_1. El marco referencial K_1 (y el cable) se mueven con una velocidad $\vec{v}$ paralela a la dirección del cable con respecto al marco K_0 del laboratorio.

a) Encuentre el campo eléctrico y magnético en coordenadas cilíndricas en K_1 y use las transformaciones de Lorentz para pasarlos a K_0.

b) ¿Cuánto valen la carga y la corriente por el cable en su referencial de reposo (K_1)? ¿Y en el laboratorio (K_0)?

c) Partiendo de la carga y la corriente del cable en el laboratorio calcule los campos directamente y compare con (a).

9. (*) De manera alternativa a la formulación euclideana vista en clase, la relatividad especial admite una formulación covariante en la cual el intervalo invariante está dado por la métrica de Lorentz

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_0^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

donde $dx_0 = cdt$ y $\eta_{\mu\nu}$ se representa por una matriz simétrica diagonal con $\eta_{ij} = \delta_{ij}$ y $\eta_{\mu 0} = -\delta_{\mu 0}$. En esta notación se distingue entre vectores *contra-variantes* que transforman como el vector posición x^μ bajo transformaciones de Lorentz y vectores *coviariantes* que transforman como el operador vectorial gradiente (cuadridimensional) $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

a) Pruebe que la métrica permite subir y bajar índices, es decir que dado un vector contravariante v^μ se define un vector covariante $v_\mu = \eta_{\mu\nu} v^\nu$. Análogamente pruebe que dado un tensor contravariante $F^{\mu\nu}$ se define un tensor mixto $F_\alpha{}^\nu = \eta_{\alpha\mu} F^{\mu\nu}$ y un tensor covariante $F_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}F^{\mu\nu}$. Obtenga explícitamente las componentes de los vectores (y tensores) con *índices bajos* en función de los análogos con *índices altos*.

b) Trantando a la métrica como un tensor, pruebe que su inversa es $\eta^{\mu\nu}$ y que esta permite subir índices (análogo a la parte anterior).

c) Pruebe que el hecho de las transfomaciones de Lorentz (Λ) sean isometrías (no cambian el módulo de los cuadrivectores) implica que cumplen la relación

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta.$$

Las transformaciones que cumplen esta relación forman un grupo con el producto matricial. Calcule los posibles valores del determinante de Λ y pruebe que existe un sub-grupo formado por los boost y las rotaciones espaciales (este subgrupo se denomina *grupo de Lorentz propio*).