Práctico 8: Formulación Hamiltoniana

1. Invierta la transformación de Legendere para derivar las propiedades de $L(q, \dot{q}, t)$ a partir de $H(q, p, t)$, tratando a las $\dot{q}_i$ como variables independientes. Pruebe que conduce a las ecuaciones de Lagrange.

   Encontrar las ecuaciones del movimiento en terminos de $L'(\dot{p}, p, t)$ siendo,

$$L'(\dot{p}, p, t) = -\dot{p}q - H(q, p, t).$$

2. Considere un sistema mecánico con energía cinética $T = T_2 + T_1 + T_0$ y energía potencial $V = V_1 + V_0$, donde los subíndices indican el grado de homogeneidad respecto a las velocidades generalizadas. Halle los momentos generalizados y observe que despejar las variables $\dot{q} = \dot{q}(q, p, t)$ requiere resolver un sistema de ecuaciones lineales. Demuestre que existe solución única si y sólo si:

$$\det \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_b} \right| \neq 0$$

   Encontrar una fórmula explícita para el Hamiltoniano.

   Como aplicación halle el Hamiltoniano de un péndulo doble utilizando la fórmula encontrada y también directamente a partir del Lagrangiano.

3. El punto de suspensión de un péndulo simple se mueve en una parábola $z = ax^2$, en el plano vertical. Hallar el hamiltoniano del sistema y las ecuaciones del movimiento.

4. El lagrangeano para una partícula de masa m y carga q en un campo electromagnético es:

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - q\Phi(\vec{r}, t) + q\dot{\vec{r}}.\vec{A}(\vec{r}, t)$$

   a. Halle el hamiltoniano.

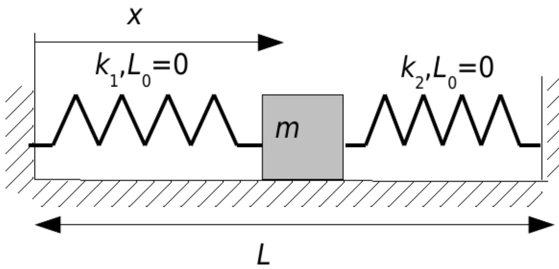
   b. Demuestre que las ecuaciones canónicas de Hamilton conducen a la fuerza de Lorentz, $m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Recuerde la relación entre campos y potenciales

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \qquad \vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

5. Un cilindro uniforme de radio a y densidad ρ, puede rotar libremente alrededor de un eje vertical. En el exterior del cilindro hay enroscado un alambre helicoidal por donde una partícula de masa m puede deslizarse sin fricción. Supongamos que una partícula sale del reposo y se desliza por el alambre por acción de la gravedad. Hallar el hamiltoniano para el sistema combinado partícula-cilindro, las ecuaciones del movimiento y resolverlas.

6. Una partícula de masa m, se mueve en una dimensión bajo la acción de dos resortes, según la figura. Los resortes tienen constantes k_1 y k_2 y longitud natural nula.

   (a) Usando la posición de la partícula desde un punto fijo como coordenada generalizada, hallar el lagrangiano y el hamiltoniano. ¿Se conserva la energía? ¿Y el hamiltoniano?



(b) Con la nueva coordenada $Q = q - b\sin(\omega t)$, $b = \frac{k_2}{k_1+k_2}$; hallar el lagrangiano y el hamiltoniano. ¿Se conserva la energía? ¿Se conserva el hamiltoniano?

7. Si no todas las variables canónicas son independientes, pero están relacionadas por condiciones auxiliares de la forma

$$\Psi_k(q_i, p_i, t) = 0$$

pruebe que las ecuaciones canónicas del movimiento pueden escribirse en la forma :

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial \Psi_k}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

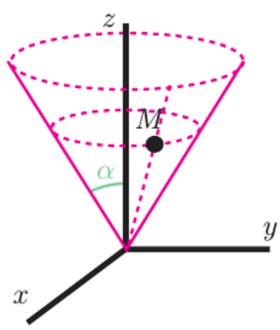
donde las λ_k son los multiplicadores indeterminados de Lagrange.

8. Una cuenta de masa m desliza sin roce y en presencia de gravedad por un alambre descrito por la ecuación $y = ax^3$ donde $a > 0$, el eje y es vertical y el eje x es horizontal.

a. Halle el hamiltoniano H. ¿Es H la energía? ¿Se conserva H?

b. A partir del formalismo canonico obtenga la ecuacion de movimiento para la variable x.

9. Una partícula de masa M se mueve sin roce y en presencia de un campo gravitacional uniforme sobre la superficie interior de un cono. El cono apunta hacia abajo, su eje de simetría es vertical y forma un ángulo α con la superficie del cono. El eje z coincide con el eje del cono.



a. Halle el lagrangeano y el hamiltoniano del sistema.

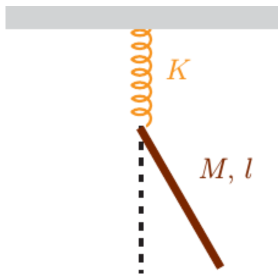
b. Escriba las ecuaciones de Hamilton y a partir de las mismas demuestre que la componente z del momentum angular respecto al vértice del cono, L_z , es una constante de movimiento. Demuestre también, a partir del formalismo canónico, que $\ddot{\rho} = AL_z^2/\rho^3 + B$ donde A y B son constantes a determinar y ρ es la distancia de la partícula al eje del cono.

10. Un cilindro uniforme de radio a y densidad ρ, puede rotar libremente alrededor de su eje, que tiene orientación vertical. En el exterior del cilindro hay enroscado un alambre helicoidal por donde una partícula de masa m puede deslizarse sin fricción. La partícula parte desde el punto más alto del alambre, estando el sistema en reposo.

    a. Escriba el hamiltoniano para el sistema combinado partícula-cilindro.

    b. Halle las ecuaciones del movimiento y resuélvalas.

11. La figura muestra una barra homogénea, de masa M y longitud l, que cuelga de un resorte y se mueve en un plano vertical fijo. El resorte tiene constante elástica k y longitud natural nula, uno de sus extremos está fijo en el techo de una habitación y está obligado a oscilar en un eje vertical.



    a. Halle la energía cinética, la energía potencial y el lagrangeano del sistema.

    b. Halle los momentos generalizados, el hamiltoniano del sistema y las ecuaciones dinámicas.

12. El hamiltoniano en notacion simpléctica para un oscilador armónico, isotrópico y de n grados de libertad es $H(\xi, t) = \frac{1}{2}\xi^T A\,\xi$, donde:

$$A_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ k & i = j \leq n \\ 1/m & i = j \geq n+1 \end{cases}$$

    a. Usando el formalismo canónico expresado en términos de paréntesis de Poisson demuestre que $\xi(t) = \exp(\Gamma A t)\xi(0)$ donde Γ es la matriz simpléctica cuyos elementos son $\gamma_{ij} = \{\xi_i, \xi_j\}$.

    b. Calcule las matrices ΓA, $(\Gamma A)^2$, $(\Gamma A)^{2n}$, $(\Gamma A)^{2n+1}$ y $\exp(\Gamma A t)$

    c. Halle $q_a(t)$ y $p_a(t)$ en funcion de las condiciones iniciales $q_a(0)$ y $p_a(0)$.